# НАВЕДЕННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В АККРЕЦИОННЫХ ДИСКАХ ВОКРУГ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

**© 2023 г. А. В. Кузин[1*]**

[1]*ГАИШ МГУ, Москва, Россия*

Поступила в редакцию ??.??.20?? г.
После доработки ??.??.20?? г.; принята к публикации ??.??.20?? г.

В рентгеновских источниках с пульсациями замагниченную нейтронную звезду окружает аккреционный диск, особенности структуры которого требуют изучения. В частности, дипольное поле звезды может частично проникать в диск, и, вмораживаясь в вещество, приводить к появлению наведенного поля в диске. Рост поля может быть ограничен его турбулентной диффузией. В настоящей работе проведен расчет такого наведенного поля. Задача сведена к решению уравнения индукции при наличии диффузии. Получено аналитическое решение уравнения, при этом одновременно рассчитана радиальная и вертикальная структура наведенного поля. Радиальная структура близка к ранее предсказанной зависимости от разности скоростей диска и магнитосферы: $b \propto \Omega_\mathrm{s} - \Omega_\mathrm{k}$, а вертикальная структура поля близка к линейной пропорциональности между полем и высотой над экватором: $b \propto z$. Обсуждается возможность существования нестационарных квазипериодических составляющих наведенного магнитного поля.
*Ключевые слова:* нейтронные звезды, аккреционные диски, магнитное поле

**DOI:** ...

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о структуре аккреционного диска, взаимодействующего с магнитным полем центральной звезды, является проблемой, связанной с исследованием рентгеновских источников с замагниченными нейтронными звездами. Цель настоящей работы состоит в расчете наведенного поля в таком диске. Мы рассматриваем случай, когда магнитное поле НЗ частично проникает в диск, причем магнитная ось НЗ наклонена к оси диска. Из-за того, что вещество в диске ионизованно и линии поля увлекаются движением вещества, в диске появляется наведенное поле (Лаи, 1999).

Одну из первых моделей взаимодействия магнитного поля с аккреционным диском предложили Гош и Лэмб (Гош и др. 1977, Гош и Лэмб 1979а,б) для объяснения наблюдаемого изменения частоты вращения НЗ. Они рассчитали момент сил, который передается от диска звезде магнитным полем, и их теоретические результаты оказались в согласии с имеющимися наблюдениями. Однако, наведенное магнитное поле в этой серии работ было введено в упрощенном виде, и Ванг (1987) показал, что модель диска у Гоша и Лэмба несамосогласована. Эти проблемы явились мотивацией для других авторов строить более правдоподобные модели наведенного магнитного поля.

Кэмпбелл (1987) нашел структуру наведенного поля решая уравнение индукции в предположениях, похожих на используемые в настоящей работе. В упомянутой работе и в следующей (Кэмпбелл 1992) была высказана и обоснована идея о пропорциональности наведенонгго поля разности угловых скоростей звезды и скорости вещества в диске: $b \propto \Omega_s - \Omega(r)$. Исследуя различные меха-

[*]Электронный адрес: alv.kuzin@gmail.com

низмы ограничения роста наведенного поля, Ванг (1995, 1997 для наклоненного ротатора) пришел к той же пропорциональности в случае, когда турбулентность в диске уравновешивает рост поля. Вангом был также исследован случай пересоединения линий поля над поверхностью диска в областях большой разницы скоростей (см. также Лавлейс и др. 1995).

Опишем основные положения используемой модели. Для моделирования диска важно знать как радиальную, так и вертикальную структуру поля внутри диска. В настоящей работе в выражении для наведенного поля вертикальная и радиальная структуры разделяются, что значительно помогает в понимании устройства этого поля. Коэффициент магнитной диффузии физически обоснованно зависит от радиальной координаты. Из уравнения индукции выведено уравнение для расчета наведенного магнитного поля и к этому уравнению поставлены граничные условия на поверхности диска. Работа сфокусирована на нахождении стационарного аксиально-симметричного магнитного поля, кратко обсуждаются альтернативные возможности.

## 2. МОДЕЛЬ ДИСКА И НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

В работе используется цилиндрическая неподвижная система координат $(r, \varphi, z)$, чей центр совмещен с НЗ, вращающейся с частотой $\Omega_\mathrm{s}$. Ось вращения НЗ совпадает с осью диска, диск лежит в плоскости $z = 0$. Координата поверхности диска будет обозначена как $z_0(r)$. Магнитное поле НЗ предполагается дипольным с моментом $\mu$, а магнитная ось наклонена к оси вращения на угол $\chi$.

Аккреционный диск геометрически тонкий, относительная полутолщина $h_0 = z_0(r)/r \ll 1$, является параметром модели. Поскольку $h_0$ в стандартной теории дисковой аккреции слабо зависит от расстояния, предполагается, что $h_0 = \mathrm{const}$. Внутренний радиус вязкого диска обозначим $r_0$: его положение зависит от магнитного поля (в том числе наведенного), но в этой работе он также будет рассматриваться как заданная величина. Для простоты считается, что $r_0$ разграничивает области вещества, коротирующего с НЗ, и вещества в диске. Вместо того, чтобы моделировать переходную зону (как, например, в работе Клужняка и Раппапорта 2007), переход от одной скорости к другой считается резким. Такой же резкий переход предполагается на поверхностях диска. Вещество в диске имеет кеплеровскую угловую скорость (отклонения от кеплеровости неважны для задачи, см. Кэмпбелл 1987), а вне диска коротирует с НЗ:

$$V = \begin{cases} \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}, & \text{в диске,} \\ \Omega_\mathrm{s} r, & \text{в магнитосфере.} \end{cases} \tag{1}$$

Будем считать, что магнитное поле состоит из дипольных компонент, которые проникают в диск, и дополнительного тороидального поля:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^\mathrm{dip} + b_\varphi \mathbf{e}_\varphi = B_r \mathbf{e}_r + (B_{\varphi 0} + b_\varphi)\mathbf{e}_\varphi + B_z \mathbf{e}_z, \tag{2}$$

где $b_\varphi = b_\varphi(r, \varphi, z)$ — наведенное поле.

Обычным образом определены радиус коротации: $r_c = (GM/\Omega_\mathrm{s}^2)^{1/3}$ и параметр быстроты: $\omega = \Omega_\mathrm{s}/\Omega_\mathrm{k}(r_0) = (r_0/r_c)^{3/2}$. Все результаты в работе приведены для параметров НЗ, характерных для аккрецирующих милисекундных пульсаров: $M = 1.4 M_\odot$, $\mu = 10^{26}$ Гс $\cdot$ см$^3$, $f = 200$ Гц.

## 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с известного уравнения индукции магнитного поля (например, Насо и Миллер 2010, 2011):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left([\upsilon \times \mathbf{B}] - \eta\, \mathrm{rot}\mathbf{B}\right). \tag{3}$$

Коэффициент магнитной диффузии $\eta$, считается, турбулентной природы и полагается пропорциональным “коэффициенту кинематической вязкости”: $\eta \propto \nu_\mathrm{T}$. В книге Липуновой и др. (2018) приведено выражение для $\nu_\mathrm{T}$: $\nu_\mathrm{T} = 2\alpha z_0^2 \Omega_\mathrm{k}/3\Pi_1$, где $\Pi_1$ — слабо зависящий от расстояния параметр: $\Pi_1 \approx 6 - 7$. Тогда запишем коэффициент магнитной диффузии в диске:

$$\eta = \Omega_\mathrm{k} r^2 / C, \tag{4}$$

где $C$ — коэффициент, слабо зависящий от расстояния. Если ввести коэффициент пропорциональности: $\eta = \epsilon \nu_\mathrm{T}$, то коэффициент $C = 3\Pi_1/2\alpha\epsilon h_0^2$. Я буду считать $C$ не зависящим от расстояния, поскольку и $h_0$, и $\Pi_1$ слабые функции $r$. В следующем разделе подробно обсуждаются возможные соотношения между коэффициентами магнитной диффузии внутри и вне диска. В дальнейшем понадобится выражение для дипольного поля в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{B}^{\rm dip} = \frac{\mu}{(r^2+z^2)^{5/2}}\times$$
$$\times\left[(2r^2\sin\chi\cos\varphi' + 3rz\cos\chi - z^2\sin\chi\cos\varphi')\mathbf{e}_r + \right.$$
$$+ (\sin\chi\sin\varphi'(r^2+z^2))\mathbf{e}_{\varphi'} +$$
$$\left. + (-r^2\cos\chi + 3rz\sin\chi\cos\varphi' + 2z^2\cos\chi)\mathbf{e}_z\right]. \quad (5)$$

Здесь угол $\varphi'$ во вращающейся системе отсчета НЗ связан с углом в инерциальной системе отсчета соотношением $\varphi' = \varphi - \Omega_s t$.

### *3.1. Уравнение диффузии поля*

Чтобы получить верхнюю оценку на наведенное поле внутри диска, допустим, что дипольное поле НЗ полностью проникает в диск (обсуждение этого предположения приведено дальше).

Учтем, что, в силу квазистационарного характера изменения поля со временем и поскольку поле зависит от времени лишь через азимутальный угол: $\mathbf{B}(\varphi', ...) = \mathbf{B}(\varphi - \Omega_{\rm s}t, ...)$, производную по времени можно заменить на производную по углу: $\frac{\partial}{\partial t} = -\Omega_{\rm s}\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Воспользуемся также соотношениями: $\mathrm{rot} B^{\rm dip} = \mathbf{0}$; $\mathrm{grad}\eta = (\eta/2r)\mathbf{e}_r$. Тогда проекция уравнения индукции на тороидальное направление принимает вид:

$$-\Omega_{\rm s}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{\partial(VB_z)}{\partial z} + \frac{\partial(VB_r)}{\partial r} +$$
$$+\eta\left(\Delta b_\varphi - \frac{b_\varphi}{2r^2} + \frac{1}{2r}\frac{\partial b_\varphi}{\partial r}\right). \quad (6)$$

Уравнение требует граничных условий, а выражение в последних скобках в (6) неудобно для их постановки. Полезна замена: $\tilde{b}_\varphi = (r/r_c)^{1/4}b_\varphi$, которая позволяет избавиться от первых производных по $r$ в скобках. Подставляя в (6) скорость (1) и магнитное поле (2) с дипольным полем, заданным (5) (причем удерживаем члены вида $z/r$ лишь до первой степени в силу их малости), получаем уравнение индукции в виде:

$$\left(\frac{r_c}{r}\right)^{1/4}\left(\Delta\tilde{b}_\varphi - \frac{9}{16r^2}\tilde{b}_\varphi + \frac{C}{r^2}\frac{\Omega_{\rm s}}{\Omega_{\rm k}}\frac{\partial\tilde{b}_\varphi}{\partial\varphi}\right) =$$
$$= \frac{C\mu}{r^5}(4 + \frac{\Omega_{\rm s}}{\Omega_{\rm k}})\sin\chi\cos\varphi + \frac{9C\mu}{2r^6}z\cos\chi -$$
$$-\frac{C\mu}{r^5}\frac{D_z}{\Omega_{\rm k}}(-\cos\chi + 3z/r\cos\varphi\sin\chi) -$$
$$-\frac{C\mu}{r_0^5}\frac{D_r}{\Omega_{\rm k}}(2\sin\chi\cos\varphi + 3z/r\cos\chi), \quad (7)$$

где коэффициенты $D_r$ и $D_z$ содержат в себе дельта-функции, возникающие из производных скорости:

$$D_r = \Omega_{\rm s}r_0\frac{1-\omega}{\omega}\delta(r-r_0), \quad (8)$$

$$D_z = r(\Omega_{\rm s} - \Omega_{\rm k})(\delta(z-z_0) - \delta(z+z_0)). \quad (9)$$

Угол $\varphi = \Omega_{\rm s}t + \varphi'$ входит в уравнение (7) только через $\cos\varphi$, значит, наведенное поле состоит только из независящей от угла стационарной составляющей и, возможно, компонент, зависящих от угла как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Обозначим: $b_\varphi = b(r,z) + b_1(r,z)\cos\varphi + b_2(r,z)\sin\varphi$. Первый и второй члены справа в уравнении (7) — это источники для $b$ и $b_1$. Третий и четвертый члены ответственны за разрывность полей на поверхностях и внутреннем краю диска; эти члены будут использованы при получении граничных условий. Для $\tilde{b} = \tilde{b}(r,z)$ внутри диска получается уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{b}}{\partial r}\right) - \frac{9\tilde{b}}{16r^2} + \frac{\partial^2\tilde{b}}{\partial z^2} = \frac{9C}{2}\frac{z}{r^6}\left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4}\mu\cos\chi. \quad (10)$$

Граничное условие на поверхности диска будет условием Неймана. Чтобы получить вид этого условия, проинтегрируем (7) по малому отрезку между близкими точками, одна из которых находится в диске, а другая — в магнитосфере $[z_0(1-\varepsilon), z_0(1+\varepsilon)]$, где $\varepsilon \ll 1$. Перепишем уравнение (7) для аксиально-симметричной компоненты поля, оставив только члены, которые после такого интегрирования дадут не бесконечно малые величины:

$$\eta\left(\frac{r_c}{r}\right)^{1/4}\frac{\partial^2\tilde{b}}{\partial z^2} = \frac{\mu\cos\chi}{r^3}(V_{\rm m} - V_{\rm d})\delta(z-z_0) + ... \quad (11)$$

Видно, что разрыв производной поля $\frac{\partial b}{\partial z}$ на поверхности диска определяется разницей скоростей в диске и в магнитосфере. Чтобы из уравнения (11) получить условие на производную, нужно узнать, как она связана с производной в магнитосфере. Это можно сделать двумя способами.

Первый подход (Насо и Миллер 2010, 2011; Рековски и др. 2000) опирается на предположениие, что в диске и магнитосфере за магнитную диффузию отвечают похожие турбулентные механизмы, но из-за низкой плотности и высокой температуры над диском (в короне) $\eta_{\rm magn} \gg \eta_{\rm disk}$. Тогда переместим $\eta$ в правую часть уравнения (11) и проинтерируем по малому отрезку, содержащему поверхность диска. Получаем, используя (4):

$$\left.\frac{\partial \tilde{b}}{\partial z}\right|_{z=z_0(1-\varepsilon)}^{z=z_0(1+\varepsilon)} = -\frac{C\mu\cos\chi}{2}\left(1-\frac{\Omega_\mathrm{s}}{\Omega_\mathrm{k}}\right)\frac{1}{r^4}\left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4}. \tag{12}$$

Теперь необходимо связать $\frac{\partial \tilde{b}}{\partial z}$ в диске и в магнитосфере. Для оценки заметим, что в уравнении (3) член $\mathrm{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$ под поверхностью того же порядка, что и над поверхностью на заданном радиусе[1]. Таким образом, учитывая стационарность, можно написать:

$$\eta_\mathrm{magn}\frac{\partial^2\tilde{b}_\mathrm{magn}}{\partial z^2} \sim \eta_\mathrm{disk}\frac{\partial^2\tilde{b}_\mathrm{disk}}{\partial z^2}. \tag{13}$$

Пусть наведенное поле в диске меняется на масштабе высот $\Delta z \sim z_0$. Масштаб изменения $b$ (или $\tilde{b}$) в магнитосфере обозначим за $z_m$. Тогда заменой производных на отношения из (13) следует:

$$\eta_\mathrm{magn}\frac{\tilde{b}_\mathrm{magn}}{z_\mathrm{m}^2} \sim \eta_\mathrm{disk}\frac{\tilde{b}_\mathrm{disk}}{z_\mathrm{d}^2}. \tag{14}$$

Ожидается, что недипольная компонента поля над и под поверхностью должна быть одного порядка, поэтому:

$$\frac{\partial\tilde{b}_\mathrm{magn}}{\partial z} \sim \frac{\tilde{b}_\mathrm{magn}}{z_\mathrm{m}} \sim \sqrt{\frac{\eta_\mathrm{d}}{\eta_\mathrm{magn}}}\frac{\partial\tilde{b}_\mathrm{disk}}{\partial z} \ll \frac{\partial\tilde{b}_\mathrm{disk}}{\partial z}. \tag{15}$$

Таким образом, в первом подходе можно пренебречь производной в магнитосфере и из (12) получить:

$$\left.\frac{\partial \tilde{b}}{\partial z}\right|_{z=z_0-\varepsilon} = \frac{C\mu\cos\chi}{2}\left(1-\frac{\Omega_\mathrm{s}}{\Omega_\mathrm{k}}\right)\frac{1}{r^4}\left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4}. \tag{16}$$

Альтернативный способ описания коэффициента магнитной диффузии в магнитосфере состоит в том, чтобы предположить полное отсутствие вещества в магнитосфере, то есть $\eta_\mathrm{magn}=0$ (Кэмпбелл 1992). В этом случае, проинтегрировав (11), получаем:

$$\left.\frac{\partial \tilde{b}}{\partial z}\right|_{z=z_0-\varepsilon} = C\mu\cos\chi\left(1-\frac{\Omega_\mathrm{s}}{\Omega_\mathrm{k}}\right)\frac{1}{r^4}\left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4}. \tag{17}$$

Я предпочитаю первый способ постановки граничных условий, поскольку корона над диском, вероятно, существует, и этот способ буду использовать в настоящей работе. Существуют вопросы к выбранному подходу: если корона коротирует с НЗ, она, вероятно, не будет турбулентной, и неясно, действительно ли коэффициент магнитной диффузии в магнитосфере будет выше, чем в диске. Примечательно, однако, как мало результат зависит от способа постановки условий.

Граничное условие на нижней поверхности диска ставится таким же образом. На внутреннем радиусе по аналогии запишем:

$$\left.\frac{\partial \tilde{b}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\frac{3C(1-\omega)}{2}\frac{1}{r_0^4}\left(\frac{r_0}{r_c}\right)^{1/4}\frac{z}{r_0}\mu\cos\chi. \tag{18}$$

Отметим пропорциональность компоненты $b$ дипольному моменту и косинусу угла наклонения: $b \propto \mu\cos\chi$.

Достаточно подсчитать число граничных условий, чтобы понять, что их недостаточно, необходимо еще одно. Известно (Лавлейс и др. (1995), Узденский и др. (2002а,б)), что при наличии диска линии поля сохраняют дипольную конфигурацию только рядом с НЗ. Вдали же от центральной звезды линии должны, пересоединяясь, размыкаться. Очевидно, на больших расстояниях от звезды наведенного поля нет. Поставим дополнительное условие первого рода на некотором внешнем радиусе, который назовем $r_\mathrm{out}$. Этот внешний радиус в нашей модели не определяется самосогласованно и является поэтому еще одним параметром. Мы обозначим за $a$ внешний радиус, нормированный на радиус коротации: $a = r_\mathrm{out}/r_c$.

Полная задача для $\tilde{b}$ выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\tilde{b}}{\partial r}\right) - \dfrac{9\tilde{b}}{16r^2} + \dfrac{\partial^2\tilde{b}}{\partial z^2} = \dfrac{9C}{2}\dfrac{z}{r^6}\left(\dfrac{r}{r_c}\right)^{1/4}\mu\cos\chi, \\ \left.\dfrac{\partial\tilde{b}}{\partial z}\right|_{z=\pm z_0} = \dfrac{C}{2}\dfrac{1}{r^4}\left(1-\dfrac{\Omega_\mathrm{s}}{\Omega_\mathrm{k}}\right)\left(\dfrac{r}{r_c}\right)^{1/4}\mu\cos\chi, \\ \left.\dfrac{\partial\tilde{b}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\dfrac{3C}{2r_0^5}(1-\omega)\left(\dfrac{r_0}{r_c}\right)^{1/4} z\mu\cos\chi, \\ \tilde{b}(r=r_\mathrm{out}) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Нормируем поле $\tilde{b}$ на величину $C\mu\cos\chi$ и везде далее будем обозначать ее как $\mu_c$. Перепишем (19) для новой функции $\beta$, для которой граничные условия на поверхности диска будут триви-

[1] Только полоидальное поле вносит вклад в $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, и это полоидальное поле в используемой модели есть просто дипольная полоидальная компонента, см. уравнение (2).

альными:

$$\tilde{b}(r,z) = \\ = \frac{\mu_c}{2r^4}\left(1-\frac{\Omega_{\rm s}}{\Omega_{\rm k}}\right)\left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4} z + \frac{\mu_c}{r_c^3}\tilde{\beta}(\rho,\zeta) \equiv \\ \equiv \tilde{b}_0(r,z) + \frac{\mu_c}{r_c^3}\tilde{\beta}(\rho,\zeta). \quad (20)$$

Здесь введены безразмерные переменные: $\rho = r/r_c$, $\zeta = z/z_0 = z/rh_0$. Прежде чем выписать задачу для $\tilde{\beta}$, обсудим подробнее составляющую поля $\tilde{b}_0$ в (20). $\tilde{b}_0$ определяется ненулевыми граничными условиями второго рода на поверхности диска и пропорциональна разрыву в скорости вещества на поверхности диска. Перейдя от $\tilde{b}_0$ обратно к $b_0$ и подставив в качестве вертикальной координаты поверхность диска $z = z_0(r) = h_0 r$, получаем $b_0^{\rm surf} = \mu_c h_0/2 \cdot (1-\Omega_{\rm s}/\Omega_{\rm k})/r^3$. С точностью до множителя это равно выражению, полученному Вангом для наведенного поля на поверхности диска в случае, когда турбулентная диффузия в диске ограничивает генерацию поля. Это выражение часто используется как простая аналитическая оценка для наведенного поля на поверхности диска (см., например, работу Клужняка и Раппапорта (2007)). Таким образом, выражение $b_0(r,z)$ описывает распределение по вертикали того поля, значение которого на поверхности было найдено Вангом.

Оставшаяся же величина $\tilde{\beta}$ определяется граничными условиями на внутреннем краю диска и правой частью уравнения (19) и Вангом не была рассмотрена. Для удобства сравнения результатов настоящей статьи с результатами других работ коэффициент $C$ будет полагаться таким, чтобы выражение для $b_0^{\rm surf}$ в точности совпадало с выражением, использованным Клужняком и Раппапортом, то есть $C = 2/h_0$. Для $\tilde{\beta}(r,z)$ мы получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{9\tilde{\beta}}{16\rho^2} + \dfrac{1}{h_0^2\rho^2}\dfrac{\partial^2\tilde{\beta}}{\partial\zeta^2} = f(\rho,\zeta), \\ \left.\dfrac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1} = 0, \tilde{\beta}(\zeta=0) = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\omega^{2/3}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{1+\omega}{\omega^{8/3}}\omega^{1/6}\zeta, \\ \beta(\rho=a) = \dfrac{a^{3/2}-1}{a^3}a^{1/4}\zeta, \\ f(\rho,\zeta) = \dfrac{9}{2}\dfrac{\zeta}{\rho^5}\left(\rho^{3/2}-1\right)\rho^{1/4}. \end{cases} \quad (21)$$

которую решаем в следующем подразделе. Сейчас заметим, что в случае очень тонкого диска $h_0 \ll 1$ уравнение дает $\beta(r,z) = 0$. Это значит, что отклонение полного наведенного поля $b$ от "ванговского поля" $b_0$ отсутствует в случае очень малой относительной толщины диска и растет с ростом $h_0$.

### *3.2. Решение для наведенного поля*

Мы предполагаем, что $\frac{\partial^2\tilde{\beta}}{\partial z^2} \approx \frac{1}{h_0^2 r^2}\frac{\partial^2\tilde{\beta}}{\partial\zeta^2}$. Строго это неверно, но корректное выражение было бы слишком сложно для любых аналитических исследований и метод разделения переменных был бы неприменим. Причина возникшего усложнения в том, что область решения — усеченная трапеция, и гранчные условия выставлены в виде $\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial z} = ...$, вместо каноничной формы $\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\mathbf{n}} = ....$ Замена $\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial z}$ на $\frac{1}{h_0 r}\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\zeta}$ в уравнении эквивалентна замене производных по $z$-координате в граничных условиях на производные вдоль нормали. Поскольку угол раскрытия диска $2h_0 \ll 1$, можно ожидать, что наше приближение приведет лишь к небольшим ошибкам. Подобные проблемы можно обойти, пользуясь сферической системой координат (ССК). Уравнение в ССК решается даже легче, чем в цилиндрической СК (ЦСК). С другой стороны, упомянутое упрощение позволяет получить "вертикальные" собственные функции в ЦСК в виде простых синусов $\sin(\mu_n\zeta)$ (см. далее), в то время как аналогичные собственные функции в ССК оказываются сложнее. Сравнение наведенного магнитного поля, рассчитанного в ЦСК (с упомянутыми упрощениями) и в ССК показано на рис. 3. Хотя отличия заметны, они несущественны в контексте моделирования структуры диска.

Очевидно, $\tilde{\beta}$ — нечетная функция $\zeta$. Рассмотрим задачу на отрезке $[0,1]$ вместо $[-1,1]$, заменив условие на нижней границе условием на экваторе: $\beta(\zeta=0) = 0$. Ищем решение в виде:

$$\tilde{\beta}(\rho,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\rho)\sin(\mu_n\zeta), \quad (22)$$

где введено обозначение: $\mu_n = \pi(n+1/2)$. Для коэффициентов $B_n(\rho)$ получаем одномерные краевые задачи. Используя линейность всех уравнений, разделим $B$ на сумму двух функций: $B(\rho) = u(\rho) + v(\rho)$[2]. Задача для $u$ будет включать нуле-

[2]Этот шаг необходим для аналитического решения (21), но

вые граничные условия и ненулевой источник, а задача для $v$ будет без источника, но с ненулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \rho(\rho u_n')' - M_n^2 u_n = \rho^2 f_n(\rho), \\ u_n'(\omega^{2/3}) = 0, u_n(a) = 0, \\ f_n(\rho) = 9\dfrac{(-1)^n}{\mu_n^2}\dfrac{\rho^{1/4}}{\rho^5}\left(\rho^{3/2}-1\right). \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \rho(\rho v_n')' - M_n^2 u_n = 0, \\ v_n'(\omega^{2/3}) = 2\dfrac{3}{4}\dfrac{(-1)^n}{\mu_n^2}\dfrac{1+\omega}{\omega^{8/3}}\omega^{1/6}, \\ v_n(a) = 2\dfrac{(-1)^n}{\mu_n^2}\dfrac{a^{3/2}-1}{a^3}a^{1/4}. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь обозначено $M_n^2 = 9/16 + \mu_n^2/h_0^2$. Задача для $v$ имеет решение:

$$v_n(\rho) = A_n\rho^{M_n} + C_n\rho^{-M_n}, \tag{25}$$

где коэффициенты $A, C$ легко найти подстановкой этого выражения в граничные условия.

Задачу для $u$ можно решить так. Решается задача Штурма-Лиувилля с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}(\rho\tilde{y}_{mn}')' - \dfrac{M_n^2}{\rho^2}\tilde{y}_{mn} + \lambda_{mn}\tilde{y}_{mn} = 0, \\ \text{+нулевые Г.У.} \end{cases} \tag{26}$$

Собственные функции (26) представляют собой комбинации функций Бесселя и Неймана:

$$\tilde{y}_{mn} = J_{M_n}(\rho\sqrt{\lambda_{mn}}) - N_{M_n}(\rho\sqrt{\lambda_{mn}})\frac{J_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})}{N_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})}, \tag{27}$$

а собственные значения — это корни уравнения:

$$\frac{J_{M_n}'(\omega^{2/3}\sqrt{\lambda_{mn}})}{J_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})} = \frac{N_{M_n}'(\omega^{2/3}\sqrt{\lambda_{mn}})}{N_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})}. \tag{28}$$

Тогда

$$u_n(\rho) = -\sum_m \frac{f_{mn}}{\lambda_{mn}}\tilde{y}_{mn}(\rho). \tag{29}$$

Здесь

$$f_{mn} = \frac{1}{||\tilde{y}_{mn}||^2}\int_{\omega^{2/3}}^a f(\rho)\tilde{y}_{mn}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho, \tag{30}$$

$$||\tilde{y}_{mn}||^2 = \int_{\omega^{2/3}}^a \rho\tilde{y}_{mn}^2\mathrm{d}\rho. \tag{31}$$

Итак, аналитическое решение было построено при помощи (20), (22), (25), (29). На рис. 1 показано распределение наведенного поля на поверхности диска по радиусу для разных параметров быстроты $\omega$ (то есть для разных внутренних радиусов диска: $r_0 = \omega^{2/3}r_c$) и разных относительных полутолщин диска $h_0$. Для иллюстрации результатов на всех рисунках внешний радиус в задаче (максимальный радиус, на котором поле НЗ сохраняет дипольную конфигурацию) $r_{\text{out}}$ полагается равным радиусу светового цилиндра как максимальному расстоянию, на котором могло бы существовать дипольное поле, связанное со вращающейся НЗ. Видно, что при заданной толщине диска кривые для разных $\omega$ вдали от внутреннего края самоподобны, то есть положение $r_0$ влияет на наведенное поле лишь вблизи внутреннего края диска.

На рис. 2 показана вертикальная структура наведенного поля при тех же параметрах. Профили распределения наведенного поля по безразмерной вертикальной координате при малых толщинах неотличимы от прямой пропорциональности: $b(\zeta) \propto \zeta$. При больших толщинах, хотя зависимость становится сложнее, она все еще с некоторой точностью может быть описана прямой. Дело в том, что вклад в наведенное поле "ванговской компоненты" $b_0$ (см. уравнение (20)) всегда линеен по $z$, но при малых толщинах $\beta$ тоже линейна. Это видно из безразмерного уравнения (21) для $\tilde{\beta}$: при $h_0 \ll 1$ решение есть линейная функция $z$. Если относительная полутолщина сравнима с единицей, то уравнение будет иметь решение более сложной формы, что и видно на рис. 2.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ

Было рассчитано магнитное поле, наводящееся в аккреционном диске из дипольного поля НЗ в предположении, что рост этого поля ограничен турбулентной диффузией магнитного поля. Для модели, используемой в настоящей работе, необходимы три внешних параметра: параметр быстроты $\omega$, относительная полутолщина диска $h_0$ и внешний радиус (в единицах радиуса коротации) области, на котором исчезнет наведенное поле, $a$. Таким образом, при моделировании аккреционного диска с использованием такой модели параметры $\omega$, то есть внутренний радиус диска, и

на самом деле проще и быстрее решать полученные краевые задачи для $B_n(r)$ (для приемлемого числа $n$) численно. В любом случае аналитическое решение полезно, хотя бы для тестирования численного кода.

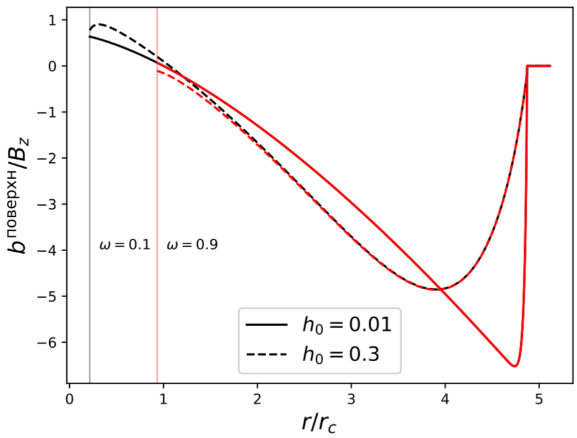


**Рис. 1.** Зависимость наведенного поля на поверхности диска $b^{\text{surf}}$, нормированного на вертикальное дипольное поле $B_z$, от расстояния до НЗ в единицах радиуса коротации. Поле рассчитано для двух параметров быстроты ($\omega = 0.1$ и $\omega = 0.9$ соответствуют черному и красному цвету, внутренние радиусы обозначены на рисунке вертикальными линиями). Для каждой $\omega$ были приняты две относительные полутолщины диска, см. легенду.

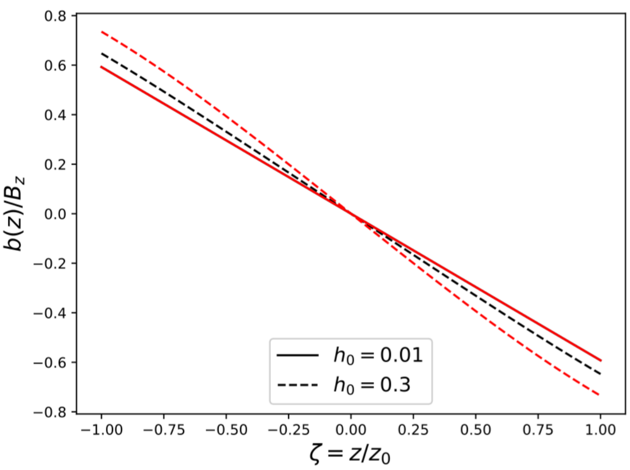


**Рис. 2.** Зависимость наведенного поля внутри диска $b(z)$, нормированного на вертикальное дипольное поле $B_z$, от безразмерной вертикальной координаты $\zeta$, на фиксированном расстоянии от НЗ $r = 1.5r_c$. Приведенные графики соответствуют тем же четырем комбинациям $\omega$ и $h_0$, что и на рис. 1. Для случая тонкого диска $h_0 = 0.01$ линии, соответствующие $\omega = 0.1$ и 0.9, почти слились друг с другом.

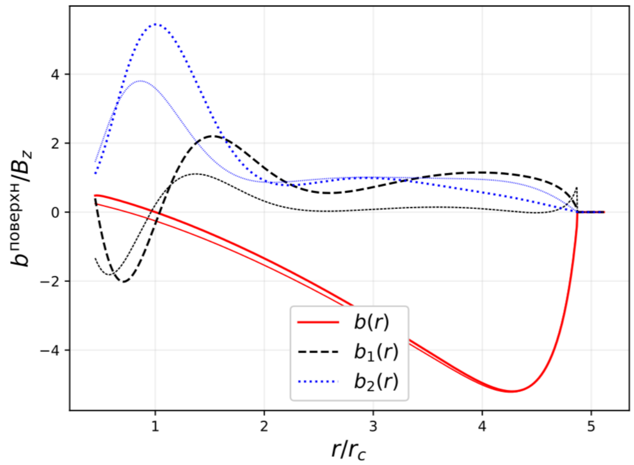


**Рис. 3.** Сравнение наведенного поля, рассчитанного в цилиндрической системе с использованием алгоритма, описанного в тексте (толстые линии), с полем, посчитанным в сферической системе численно (тонкие линии того же цвета). Относительная полутолщина диска $h_0 = 0.1$, параметр быстроты $\omega = 0.3$. Показано поле $b$ и коэффициенты Фурье $b_1, b_2$ (см. текст) на поверхности диска.

толщина диска должны вычисляться самосогласованно.

### *4.1. Аксиально-симметричная компонента*

Кэмпбелл (1987) сделал похожие предположения о механизме диссипации поля (турбулентная диффузия) и нашел аксиально-симметричное стационарное наведенное поле в форме интеграла со сложным ядром. Поле было рассчитано на луче $[r_0, +\infty)$, а вертикальная структура получена только в неявном виде[3]. Эту проблему удалось избежать, представив $b$ в виде вклада $b_0 \propto (\Omega_\mathrm{s} - \Omega_\mathrm{k})z$ и модификации $\beta$, причем в ряде для $\beta$ вертикальная координата входит простым образом. Анализ уравнений, как правило, удобнее анализа двумерного интеграла. К тому же, Кэмпбелл (1987) принял две модели для магнитной диффузи: $\eta \sim \mathrm{const}$ и $\eta \propto r^2$, тогда как для диска с постоянной относительной полутолщиной ближе аппроксимация $\eta \propto r^{1/2}$.

Меняя положение, на котором ставится внешнее граничное условие, можно учесть пересоединение линий поля над поверхностью диска. Считается (Ванг 1995, Лавлейс 1995), что пересоединение приводит к тому, что наведенное поле

[3] Граничные условия на поверхностях диска не ставились автором в явном виде.

не может стать больше вертикального, то есть $|b/B_z| \lesssim 1$. Этого можно добиться и в используемой в этой работе модели, уменьшив параметр $a$. Для относительной полутолщины $h = 0.01$ можно добиться $|b/B_z| < 1$ при $a \lesssim 1.9$, а для $h = 0.3$ при $a \lesssim 2.2$. Приходим к тому, что, учитывая пересоединение, зона, в которой линии поля НЗ связаны с диском, должна быть узкой (см. Мэтт и Пудриц (2005)).

### *4.2. Возможные вклады, зависящие от азимута*

Неясно, в какой мере компоненты дипольного поля, зависящие от азимута, будут проникать в диск. В случае, если они вообще не будут проникать (например, Лаи (1999) попытался построить модель наведенного поля в этом случае в "гибридной модели" ), наведенное поле выражается через $b(r, z)$.

С другой стороны, если бы эти компоненты проникали, описанный подход позволил бы найти решение для несимметричных компонент наведенного поля. Согласно уравнению (7) (для его вывода было сделано предположение о полном проникновении дипольного поля НЗ в диск), полное наведенное поле $b_\varphi$ состоит из уже найденного $b$ и компонент, пропорциональных косинусу и синусу азимутального угла. Тогда полное наведенное поле $b_\varphi = b(r,z) + b_1(r,z)\cos\varphi + b_2(r,z)\sin\varphi$. По аналогии с алгоритмом вывода уравнения для $b$ и его решения можно вывести уравнения для коэффициентов Фурье $b_{1,2}$ и решить их. Численное решение таких уравнений приведено на рис. 3 (также проиллюстрировано, как упрощение $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h_0 r}\frac{\partial}{\partial x}$ влияет на решение). Можно видеть, что компоненты $b_{1,2}$, вообще говоря, не малы,. Если они существуют, они будут вносить значительный вклад в давление магнитного поля.

Можно предположить, что зависящая от угла компонента поля НЗ, для заданного угла меняющаяся периодически с частотой вращения НЗ, проникает в диск лишь частично. Можно рассчитать эффект экранировки, оценив толщину скин-слоя с коэффициентом магнитной диффузии, используемым в этой работе, но такая работа выходит за рамки настоящей статьи. Таким образом, коэффициенты Фурье $b_{1,2}$, приведенные на рис. 3, являются оценками сверху для возможных нестационарнных составляющих наведенного магнитного поля. Очевидно, что $b_{1,2} \propto \mu \sin\chi$, то есть отсутствуют, если магнитная ось и ось вращения НЗ сонаправлены.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена моделированию наведенного поля в аккреционном диске вокруг замагниченной звезды с магнитной осью, наклоненной к оси вращения диска. Из уравнения индукции выведено дифференциальное уравнение в частных производных для наведенного поля в предположении о полном проникновении дипольного поля центральной звезды в диск. Эта работа фокусируется на нахождении аксиально-симметричной компоненты: методом разделения переменных решается полученное уравнение в плоскости $(r, z)$. Таким образом, найдена и радиальная, и вертикальная структура наведенного поля. Коротко обсуждаются также возможные компоненты поля, не обладающие цилиндрической симметрией, и приводится результат их моделирования в качестве оценки сверху реального несимметричного наведенного поля.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № РНФ 21-12-00141). Автор выражает благодарность Г. В. Липуновой за продуктивное обсуждение манускрипта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванг (Y.-M. Wang), Astron. Astrophys. **183**, 257 (1987).
2. Ванг (Y.-M. Wang), Astrophys. J. **449**, 153 (1995).
3. Ванг (Y.-M. Wang), Astrophys. J. **475**, 135 (1997).
4. Гош и др. (P. Ghosh, F. K. Lamb, C. J. Pethick), Astrophys. J. **217**, 578 (1977).
5. Гош, Лэмб (P. Ghosh, F. K. Lamb), Astrophys. J. **232**, 259 (1979).
6. Гош, Лэмб (P. Ghosh, F. K. Lamb), Astrophys. J. **234**, 296 (1979).
7. Клужняк, Раппапорт (W. Kluźniak, S. Rappaport), Astrophys. J. **671**, 1990 (2007).
8. Кэмпбелл (C. G. Campbell), Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **229**, 405 (1987).
9. Кэмпбелл (C. G. Campbell), Geophys. Astro. Fluid., **63**, 179 (1992).
10. Лавлейс и др. (R. V. E. Lovelace, M. M. Romanova, G. S. Bisnovatyi-Kogan), Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **275**, 244 (1995).
11. Лаи (D. Lai), Astrophys. J. **524**, 1030 (1999).
12. Липунова и др. (Lipunova G., Malanchev K., Shakura N. in Shakura N. ed.), Astrophys. Space Sc. L. **454** (2018).
13. Мэтт, Пудриц (S. Matt, R. E. Pudritz), Astrophys. J. **632**, 135 (2005).

14. Насо, Миллер (L. Naso, J. C. Miller), Astron. Astrophys. **521**, 31 (2010).
15. Насо, Миллер (L. Naso, J. C. Miller), Astron. Astrophys. **531**, 163 (2011).
16. Рековски и др (M. V. Rekowski, G. Rüdiger, D. Elstner), Astron. Astrophys. **353**, 813 (2000).
17. Узденский и др.(D. A. Uzdensky, A. Königl, C. Litwin), Astrophys. J. **565**, 1191 (2002).
18. Узденский и др.(D. A. Uzdensky, A. Königl, C. Litwin), Astrophys. J. **565**, 1205 (2002).