

# Магниторотационная неустойчивость в кеплеровских дисках: нелокальный подход

Н. И. Шакура<sup>1</sup>, К. А. Постнов<sup>1,2</sup>,  
Д. А. Колесников<sup>1</sup>, Г. В. Липунова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ГАИШ МГУ, Москва, Университетский пр-т, 13

<sup>2</sup>Казанский Федеральный Университет, Казань, Кремлевская ул., 18

7 ноября 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Нелокальный модальный анализ</b>	<b>5</b>
2.1	Основные уравнения . . . . .	5
2.2	Случай несжимаемой жидкости . . . . .	6
2.3	Как создать однородное магнитное поле в тонком диске? . .	9
2.4	Дифференциальное уравнение для малых возмущений . . .	12
2.5	Вывод дисперсионного уравнения и критической альфвенов- ской скорости . . . . .	15
2.6	Применение к тонким аккреционным дискам . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Магниторотационная неустойчивость с альфвеновской ско- ростью, зависящей от радиуса</b>	<b>20</b>
3.1	Случай постоянного фонового магнитного поля . . . . .	21
3.2	Случай с радиально зависимым фоновым магнитным полем	23
<b>4</b>	<b>Итоги и обсуждение</b>	<b>30</b>

**А Численное решение уравнения (17) при  $r_{\text{out}} > r_0$**  **35**

**В Случай  $r_{\text{out}} < r_0$**  **40**

### Аннотация

В рамках нелокального подхода пересмотрен модальный анализ малых возмущений кеплеровского течения идеального газа, приводящих к магниторотационной неустойчивости, как в постоянном вертикальном магнитном поле, так и в случае радиально изменяющейся фоновой альфвеновской скорости. Моды магниторотационных возмущений описываются дифференциальным уравнением типа уравнения Шрёдингера с некоторым эффективным потенциалом, включающим в простом случае, когда альфвеновская скорость постоянна по радиусу, «отталкивающий» ( $1/r^2$ ) и «притягивающий» ( $-1/r^3$ ) члены. Учет радиальной зависимости фоновой альфвеновской скорости приводит к качественному изменению формы эффективного потенциала. Показано, что в «неглубоких» потенциалах нет стационарных уровней энергии, соответствующих неустойчивым модам  $\omega^2 < 0$ . В тонких аккреционных дисках длина волны возмущения  $\lambda = 2\pi/k_z$  меньше полутолщины  $h$  диска только в «глубоких» потенциалах. Найдена предельная величина фоновой альфвеновской скорости  $(c_A)_{\text{cr}}$ , выше которой магниторотационная неустойчивость не возникает. В тонких аккреционных дисках при малой фоновой альфвеновской скорости  $c_A \ll (c_A)_{\text{cr}}$  инкремент магниторотационной неустойчивости  $\omega \approx -\sqrt{3} i c_A k_z$  подавлен по сравнению со значением, получаемым в локальном анализе возмущений.

Ключевые слова: магниторотационная неустойчивость, аккреционные диски

## 1 Введение

Сдвиговые течения вблизи астрофизических объектов, характеризующиеся неоднородным полем скоростей, являются универсальным источником и агентом переноса энергии и тесно связаны с явлениями турбулентности [1, 2, 3], генерации магнитных полей [4], ускорения частиц [5].

Устойчивость сдвиговых гидродинамических течений относительно малых возмущений в магнитном поле в лабораторных условиях впервые была рассмотрена в работах Е. П. Велихова [6] и С. Чандрасекара [7]. В отсутствии магнитного поля гидродинамическая неустойчивость во вращающемся сдвиговом потоке появляется в случае, когда момент импульса убывает наружу от оси вращения [8].

Е. П. Велихов и С. Чандрасекар показали, что в пронизанном вертикальным магнитным полем, осесимметричном, дифференциально вращающемся потоке с угловой скоростью, убывающей наружу, возможна магнито-ротационная неустойчивость (МРН)<sup>1</sup>.

Теория МРН была применена к астрофизическим аккреционным дискам в важной работе [10], и с тех пор считается, что эта неустойчивость порождает турбулентность в аккреционных дисках (см. обзор [11]). Нелинейное численное моделирование (например, [12, 13, 14]) подтверждает, что МРН действительно может поддерживать турбулентность в аккреционных дисках.

Считается, что для рассмотрения МРН и анализа ее свойств достаточно локального приближения в идеальной несжимаемой жидкости, когда бесконечно малые возмущения берутся в цилиндрических координатах  $r, z, \phi$  в виде плоских волн  $\sim e^{i(\omega t - k_r r - k_z z)}$ . При этом дифференциальные МГД-уравнения превращаются в алгебраические, дисперсионное соотношение для возмущений находится в виде биквадратного уравнения [10, 15], а инкремент неустойчивости не зависит от магнитного поля (см. ниже уравнения (77) и (78), соответственно). Учет неидеальности в этом же приближении несколько изменяет условия возникновения МРН, но оставляет качественно ту же картину [16, 17].

Однако уже в пионерской работе Е.П. Велихова [6] проводился глобальный анализ длинноволновых возмущений в направлении, перпендикулярном плоскости основного течения для течений между двумя проводящими вращающимися цилиндрами с постоянным моментом импульса по радиусу,  $\Omega(r)r^2 = \text{const}$ . Радиальные возмущения находились из решения краевой задачи Штурма-Лиувилля (в ВКБ-приближении). Было показано, что при таком подходе появляется критическое магнитное поле, выше которого неустойчивость подавляется, причем зависимость от граничных условий остается даже в случае отнесения внешнего цилиндра на бесконечность.

Ввиду потенциальной важности МРН для возникновения турбулентности в дисковых течениях (аккреционные и протоплантные диски, газовые диски галактик), в 1990е – 2000е годы проводились активные аналитиче-

---

<sup>1</sup>Мы рассматриваем случай только вертикального фонового магнитного поля. Осесимметричные газовые течения с тороидальным фоновым магнитным полем при наличии силы тяжести подвержены неустойчивости Паркера [9].

ские и численные исследования МРН в приближении несжимаемой жидкости в однородном магнитном поле, в том числе и глобальный анализ этой неустойчивости. Нелокальный анализ показывает, что в сдвиговых потоках дисперсионное уравнение для моды  $\omega(k)$  содержит член, зависящий от радиуса ( $\propto -1/r^2$ ), которым обычно пренебрегают в локальном модальном анализе. В глобальном анализе, как и ожидается, появляется критическое магнитное поле, которое стабилизирует МРН [18, 19, 20, 21, 22]. Для аккреционных дисков вокруг центрального тяготеющего тела полученные результаты зависят от выбора граничных условий для возмущений на внутреннем и внешнем радиусе течения [23, 24, 22]. Выбор граничных условий сказывается на дискретизации локальных дисперсионных соотношений [22].

Несмотря на значительную изученность проблемы, в данной работе мы **независимо и подробно** проводим нелокальный линейный анализ МРН в кеплеровских аккреционных дисках с угловой скоростью  $\Omega(r) \propto 1/r^{3/2}$ . Мы выводим дисперсионное уравнение, которое может быть сведено к уравнению типа Шрёдингера с «энергией»  $E = -k_z^2$  и эффективным потенциалом  $U(r)$ , который имеет два члена: «притягивающий»,  $\propto -1/r^3$  и «отталкивающий»,  $\propto 1/r^2$ . В отличие от локального анализа, эффективный потенциал обращается в ноль в точке  $r_0$ , зависящей от частоты моды  $\omega$ , волнового числа  $k_z$  и фоновой альфвеновской скорости. Мы детально рассматриваем оба случая, когда внешний радиус диска  $r_{\text{out}} > r_0$  и  $r_{\text{out}} < r_0$ . Мы численно решаем краевую задачу для радиальных граничных условий, соответствующих как жестким, так и свободным границам течения. Мы подчеркиваем важность положения границ течения относительно нулевых точек эффективного потенциала для краевой задачи Штурма-Лиувилля, который появляется в нелокальном анализе. Мы показываем, что в «мелких» эффективных потенциалах для краевой задачи возможна ситуация, зависящая от положения внутренней границы течения, когда МРН не возникает. Такая ситуация возможна для течений вокруг обычных звезд с большими радиусами. Естественно, что для течений вокруг компактных объектов потенциальные ямы очень глубокие, и спектр энергии практически непрерывный. Мы явно выписываем значение критического магнитного поля, подавляющего МРН, находим зависимость инкремента МРН от фонового однородного магнитного поля. Нами впервые рассматриваем случай фонового магнитного поля, степенным образом зависящего от радиуса. Нами

также рассмотрен случай несжимаемой жидкости с плотностью, зависящей от радиальной координаты, при котором уравнения для малых возмущений остаются такими же, как для постоянной по координате плотности, но меняется эффективный потенциал.

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы проводим линейный модальный анализ для малых возмущений в идеальной жидкости в виде  $\propto f(r) \exp[i(\omega t - k_z z)]$ . В разделе 2.5, мы выводим алгебраическое дисперсионное уравнение  $\omega(k_z)$  и значение критической альфвеновской скорости, ниже которого появляется МРН. В разделе 3.2 мы впервые рассматриваем МРН на фоне радиально меняющегося вертикального магнитного поля и показываем, что в этом случае эффективный потенциал может нетривиально изменяться. В разделе 4, мы сравниваем наши результаты со стандартными результатами, полученными в локальном модальном анализе. В Приложении А мы численно решаем уравнение Шрёдингера для нелокальных возмущений для постоянной фоновой альфвеновской скорости в случае, когда внешний радиус течения  $r_{\text{out}} > r_0$ . В Приложении В мы рассматриваем случай  $r_{\text{out}} < r_0$ , в котором задача сводится к решению стандартной задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями третьего рода.

## 2 Нелокальный модальный анализ

### 2.1 Основные уравнения

Рассмотрим дифференциально вращающуюся идеальную жидкость в однородном вертикальном магнитном поле. Классические результаты были получены в работах Е.П. Велихова и С. Чандрасекара, которые изучали устойчивость сдвиговых гидродинамических магнитных потоков [6, 7].

Запишем уравнения движения идеальной МГД-жидкости.

1) Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0; \quad (1)$$

2) Уравнение Эйлера, включающее силу тяжести и силу Лоренца,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi_g + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

(здесь  $\phi_g$  – ньютоновский гравитационный потенциал<sup>2</sup>);

3) Уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3)$$

Мы будем рассматривать адиабатические возмущения с постоянной энтропией

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)s = 0. \quad (4)$$

Для таких возмущений вариации возмущённой плотности равны нулю,  $\rho_1 = 0$ , и вариации давления в уравнении энергии исчезают,  $p_1 = 0$  (в предположении уравнения состояния идеального газа, см., напр., Appendix A в [26]).

Мы исследуем случай чисто кеплеровского вращения в цилиндрической системе координат, при котором компоненты невозмущённой скорости  $v_\phi \equiv u_{\phi,0} = \sqrt{GM/r}$ ,  $u_{r,0} = u_{z,0} = 0$ . Мы предполагаем, что силы, обусловленные градиентом давления, малы и появляются только в возмущённых уравнениях.

## 2.2 Случай несжимаемой жидкости

Рассмотрим малые эйлеровы возмущения в идеальной несжимаемой жидкости. Компоненты скоростей на фоне невзмущенного течения со скоростью  $u_{\phi,0}$  будут  $u_r$ ,  $u_\phi$ ,  $u_z$ . Магнитное поле запишем в виде  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$  и давление в виде  $p_0 + p_1$ . Будем рассматривать полоидальное фоновое поле  $\mathbf{B}_0$ . Будем искать возмущения в виде  $f(r) \exp[i(\omega t - k_z z)]$  заметив, что время  $t$  и координата  $z$  входят в систему уравнений только под знаком производной.

Выбор возмущений с гармоническими функциями по вертикальной координате обусловлен самой постановкой задачи для дисковых течений ограниченных по  $z$ -координате. В таких течениях (аккреционные и протопланетные диски, газовые диски галактик) вертикальный градиент давления уравновешивается градиентом силы тяжести по  $z$ -координате, и это отличает их от лабораторных течений.

---

<sup>2</sup>В принципе, можно решать задачу в шварцшильдовской метрике используя потенциал  $\phi = \frac{c^2}{2} \ln(1 - \frac{r_g}{r})$ ,  $r_g = 2GM/c^2$  см. [25].

Интегрирование невозмущенного уравнения Эйлера по  $z$ -координате приводит к политропному распределению плотности  $\rho(r, z) = \rho_c(1 - (z/z_0)^2)^n$  с полутолщиной  $z_0 = \frac{2(n+1)P_c}{\Omega^2(r)\rho_c}$ , где  $\rho_c$  и  $P_c$  – центральная плотность и давление,  $n$  – индекс политропы ( $n = 3/2$  в случае устойчивого к конвекции диска). Для политропного уравнения состояния  $n = 1/(\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты, и в случае несжимаемой жидкости  $\gamma \rightarrow \infty$  и  $n = 0$ . В этом предельном случае вертикальный градиент плотности исчезает, и модельное течение представляет собой кеплеровский диск с постоянной вертикальной плотностью, ограниченной полутолщиной диска  $h$  (П-образное распределение плотности). Плотность может изменяться по радиусу (см. ниже в разделе 3).

Для бесконечно малых возмущений приближение возмущений гармоническими функциями по  $z$ -координате подходит как для тонких ( $h/r \ll 1$ ), так и для толстых дисков ( $h/r \lesssim 1$ ) при условии длины волны возмущений меньше полутолщины диска:  $\lambda = 2\pi/k_z < h$ . Поэтому окончательные уравнения для линейных возмущений в случае несжимаемой жидкости, которые будут получены ниже, не отличаются от уравнений для лабораторной плазмы с постоянной плотностью по  $z$ -координате.

Для выбранных возмущений уравнение неразрывности (1) для несжимаемой жидкости  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) - ik_z u_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - ik_z u_z = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в локальном приближении в уравнении неразрывности обычно пренебрегают малым слагаемым  $\frac{u_r}{r}$ , и тогда возмущения можно искать в виде  $\propto \exp[i(\omega t - k_r r - k_z z)]$ . Аналогично записывается уравнение соленоидальности магнитного поля  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rb_r) - ik_z b_z = 0 \quad (6)$$

Радиальная, азимутальная и вертикальная компоненты уравнения Эйлера, соответственно, записываются в виде:

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{c_A^2}{B_0} \left[ \frac{\partial b_z}{\partial r} + ik_z b_r \right], \quad (7)$$

$$i\omega u_\phi + \frac{\varkappa^2}{2\Omega} u_r = -i \frac{c_A^2}{B_0} k_z b_\phi \quad (8)$$

(здесь мы ввели эпициклическую частоту  $\varkappa^2 = 4\Omega^2 + r \frac{d\Omega^2}{dr} \equiv \frac{1}{r^3} \frac{d\Omega^2 r^4}{dr}$  и невозмущённую альфвеновскую скорость  $c_A^2 = B_0^2 / (4\pi\rho_0)$ ),

$$i\omega u_z = ik_z \frac{p_1}{\rho_0}. \quad (9)$$

Три компоненты уравнения индукции с учетом соленоидальности магнитного поля  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  записываются в виде:

$$i\omega b_r = -iB_0 k_z u_r, \quad (10)$$

$$i\omega b_\phi = -iB_0 k_z u_\phi + r \frac{d\Omega}{dr} b_r, \quad (11)$$

$$i\omega b_z = -B_0 \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r}. \quad (12)$$

Выразим все возмущения через радиальные возмущения магнитного поля  $b_r$ . Используя уравнения (9), (5) и (10), находим

$$\frac{p_1}{\rho_0} = \frac{\omega u_z}{k_z} = i \frac{\omega^2}{B_0 k_z^3} \frac{1}{r} \frac{\partial r b_r}{\partial r}. \quad (13)$$

Из уравнения (10) находим

$$u_r = -\frac{\omega}{B_0 k_z} b_r. \quad (14)$$

Подставляя (14), (11) и (6) в (8), получаем:

$$(c_A^2 k_z^2 - \omega^2) u_\phi = i \left[ \frac{\omega^2 \varkappa^2}{2\Omega B_0 k_z} - \frac{c_A^2 k_z}{B_0} r \frac{d\Omega}{dr} \right] b_r. \quad (15)$$

Наконец, используя уравнения (13) – (15), из уравнения (7) мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $b_r$ :

$$\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 b_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_r}{r} \right) - b_r k_z^2 \right] + 2\Omega \left( \frac{\omega^2 \varkappa^2}{k_z^2 2\Omega} - c_A^2 r \frac{d\Omega}{dr} \right) b_r = 0. \quad (16)$$



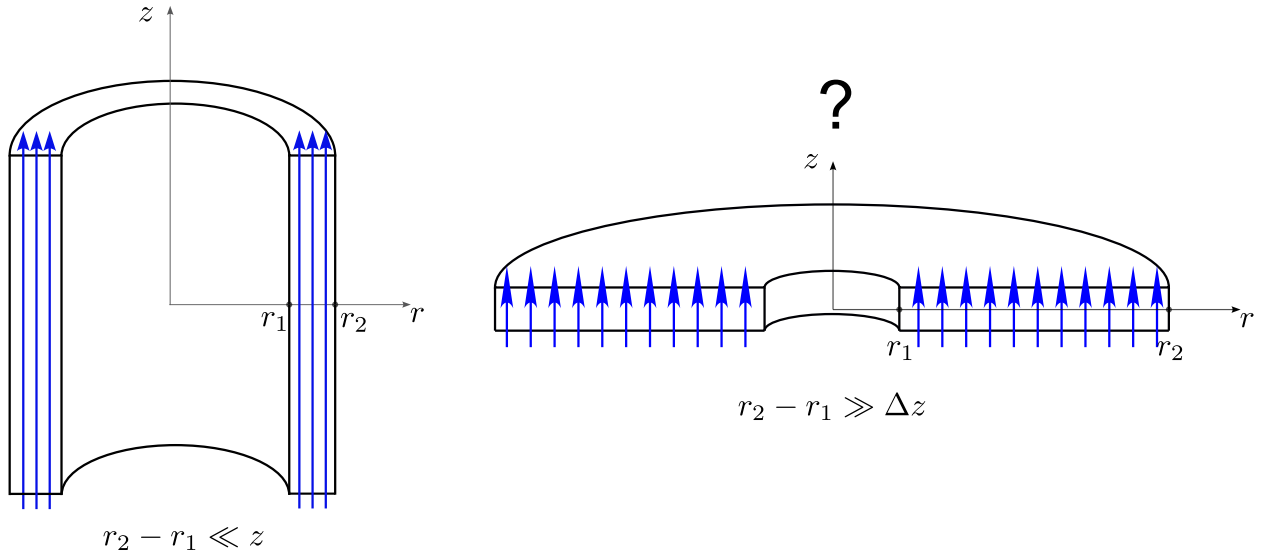


Рис. 1: Слева: течение в однородном магнитном поле в узком зазоре между двумя цилиндрами. Справа: тонкий протяженный аккреционный диск в однородном вертикальном магнитном поле.

Это уравнение следует дополнить граничными условиями, которые определяются постановкой задачи. Например, Е.П. Велихов рассматривал течение между двумя жесткими проводящими цилиндрами, на которых возмущения скорости и магнитного поля обращаются в ноль. В более реалистичном случае, который применим к тонким аккреционным дискам, нужно выбирать краевые условия на свободной границе. Для замагниченных дисков возможна различная постановка таких граничных условий (см., например, обсуждение в работе [21]). Мы покажем, что краевые условия на свободной внутренней и внешней границе кеплеровского тонкого диска с магнитным полем соответствуют обращению в ноль Лагранжевых вариаций давления. Сначала рассмотрим, как можно создать однородное магнитное поле в тонком проводящем диске.

### 2.3 Как создать однородное магнитное поле в тонком диске?

Обсудим, как создать однородное магнитное поле в аккреционном диске (см. рис. 1). Сначала напомним, что это легко сделать в случае двух беско-

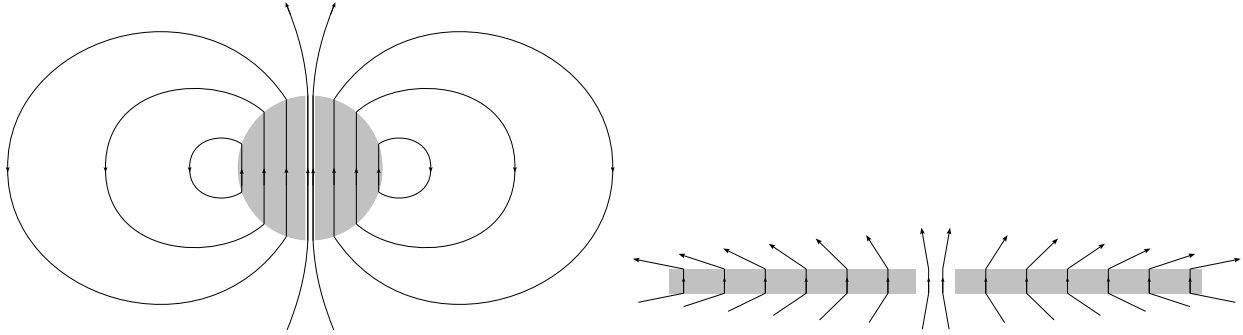


Рис. 2: Деформация проводящей сферы в диск. Поверхностная сила Лоренца  $\vec{J}_s \times \vec{B}$  превращает сферу в вытянутый диск без других сил.

нечных хорошо проводящих цилиндров (слева на рис. 1) с токами, текущими в противоположных направлениях. Но как организовать токи в случае плоского проводящего диска, чтобы получить однородное магнитное поле внутри него (справа на рис. 1)? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу. Пусть у нас есть хорошо проводящая сфера с поверхностными токами  $j_\phi \propto \sin \theta$ , такими, что поле внутри сферы однородно. Плавно деформируем сферу в диск с сохраняющимся магнитным потоком  $d\Phi_s = B_0 \cos \theta dS$ , где  $dS = 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta$  – элемент площади поверхности сферы, а  $\theta$  – угол между нормалью к поверхности и магнитными линиями. На диске  $d\Phi_d = B_d 2\pi r dr$  ( $B_d$  – поле в диске). Сохранение потока  $\Phi_s = \Phi_d$  подразумевает:  $2\pi R_0^2 \int B_0 \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi \int B_d r dr$ . В случае однородного поля имеем  $R_0^2 B_0 \sin^2 \theta + C = B_d r^2$ . Константа  $C$  должна равняться нулю из условия  $\theta \rightarrow 0$   $r \rightarrow 0$ . При  $\theta = \pi/2$  для однородных полей находим радиус внешнего диска  $r_d = R_0 \sqrt{B_0/B_d}$ . Таким образом, мы построили диск с поверхностными токами, создающими излом линий магнитного поля на поверхности, и однородным магнитным полем внутри.

Теперь вырежем узкую область на рассматриваемой сфере вокруг вертикальной оси. Поскольку вблизи вертикальной оси поверхностные токи исчезают, удаление небольшой области вблизи оси не изменит существенно поле внутри сферы. Разумеется, такое преобразование изменяет топологию: сфера превращается в тор.

Можно также деформировать сферу в диск с сохранением магнитного потока, но с изменяющимся по радиусу магнитным полем  $B_d(r)$ . В процессе деформации изменяющееся магнитное поле вызывает индукционное

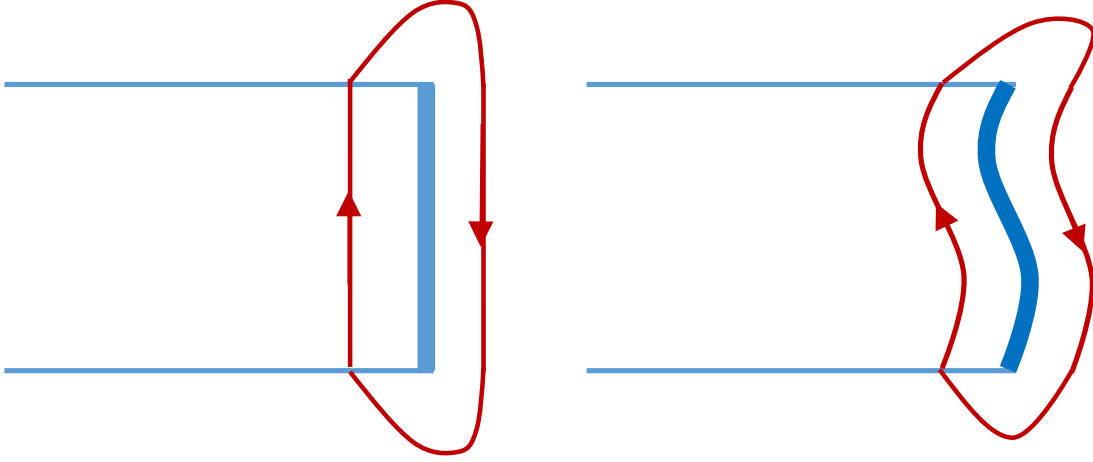


Рис. 3: Схема, показывающая зануление поверхностной силы Лоренца  $\vec{j}_s \times \vec{B}$  на внешней границе аккреционного диска. Слева: невозмущенная конфигурация, поверхностный ток  $\vec{j}_s$  течет перпендикулярно плоскости картинки. Справа: возмущенный случай, показана только проекция поля на плоскость  $r, z$ . Возмущенная компонента поля  $b_\phi$  не показана.

электрическое поле, которое усиливает или уменьшает поверхностные токи в диске  $j_s$ . См. рис. 2. Должно быть ясно, что при такой деформации с сохранением магнитного потока можно получить любую зависимость магнитного поля от радиуса.

Отметим также, что в полученной конфигурации поверхностный ток на внутренней границе диска обращается в ноль и соответственно, зануляется сила Лоренца, действующая на элемент поверхности,  $\vec{j}_s \times \vec{B}$ . На внешней границе магнитное поле при переходе из диска наружу меняет знак, так что имеет место скачок магнитного поля и должен течь поверхностный ток. Сила Лоренца будет определяться суммой двух сил, действующих на поверхностный ток со стороны внутреннего и внешнего магнитного поля. Так как по построению внешнее и внутреннее поля вблизи границы равны, но противоположно направлены, полная сила Лоренца, приложенная к внешней границе диска, обращается в ноль (см. Рис. 3).

## 2.4 Дифференциальное уравнение для малых возмущений

Следуя работам [6] и [7], легко показать, что в уравнении (16)  $\omega^2$  должна быть действительным числом для широкого диапазона граничных условий, т.е. допускаются только осцилляции ( $\omega^2 > 0$ ) или экспоненциальный рост или затухание ( $\omega^2 < 0$ ) возмущений. Удобно исключить первую производную из уравнения (16) с помощью подстановки  $\Psi = b_r \sqrt{r}$ , чтобы получить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left\{ -k_z^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{2\Omega \left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} \frac{\kappa^2}{2\Omega} - c_A^2 r \frac{d\Omega}{dr} \right]}{\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2} \right\} \Psi = 0. \quad (17)$$

Краевые условия для этого уравнения выбираются из физических соображений равенства нулю на свободной границе лагранжевых возмущений давления (напомним, что как показано выше, поверхностная сила Лоренца равна нулю на обеих границах) :

$$\Delta p = \delta p + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p = 0 \quad (18)$$

(здесь  $\boldsymbol{\xi}$  – вектор бесконечно малого смещения,  $\delta p = p_1$  – эйлерова вариация давления). Так как в нашей постановке задачи предполагается кеплеровское невозмущенное течение, в котором сила притяжения уравновешивается центробежной силой, для малых смещений  $\boldsymbol{\xi}$  второе слагаемое в выражении для лагранжевой вариации можно занулить (с точностью до членов  $(h/r)^2$  в тонком аккреционном диске с полутолщиной  $h$ ), и  $\Delta p = p_1$ . После деления на дифференциал времени  $dt$  уравнение (18) запишется в виде

$$Dp/Dt = \partial p/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = 0$$

где  $D/Dt$  – лагранжева производная,  $\partial/\partial t$  – эйлерова производная.

На внешней и внутренней границах аккреционного диска с магнитным полем граничные условия записываем в виде  $p_1|_{r_{\text{in}}, r_{\text{out}}} = 0$ . Как следует из уравнения (13), эти граничные условия приводят к однородному граничному условию третьего рода на функцию  $\Psi$  на краях течения  $r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ :

$$\left. \frac{d\Psi}{dr} \right|_{r_{\text{in}}} + \frac{1}{2} \frac{\Psi}{r} \Big|_{r_{\text{in}}} = 0, \quad \left. \frac{d\Psi}{dr} \right|_{r_{\text{out}}} + \frac{1}{2} \frac{\Psi}{r} \Big|_{r_{\text{out}}} = 0. \quad (19)$$

Отметим, что в работах Е.П. Велихова [6] и [22] решалась краевая задача с однородными условиями первого рода на границах ( $\Psi|_{r_{\text{in}}} = 0, \Psi|_{r_{\text{out}}} = 0$ ).

Уравнение (17) может трактоваться как уравнение типа уравнения Шрёдингера с “энергией”

$$E = -k_z^2 \quad (20)$$

и “потенциалом”

$$U = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} \varkappa^2 - c_A^2 r \frac{d\Omega^2}{dr} \right]}{\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (21)$$

Как известно (см., например, [27, 28]), в области отрицательных значений потенциала  $U$  собственные значения (“энергетические уровни”) с отрицательной энергией  $E < 0$ . Существование уровней с отрицательной энергией, то есть решений для  $\mathbf{b}$ , при действительных  $k_z$  и  $\omega^2 < 0$ , означает неустойчивость потока. Таким образом, вид потенциала  $U$  задает область в потоке и интервал значений  $\mathbf{B}$ , допускающих развитие МРН.

Отметим интересные для нашей задачи свойства потенциала  $U$ . Для кеплеровского закона с  $\Omega^2 = GM/r^3$  и  $\varkappa^2 = \Omega^2$  потенциал принимает вид:

$$U = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r^3} \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2 \right]}{\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (22)$$

Для неустойчивых режимов ( $\omega^2 < 0$ ) числитель во втором слагаемом уравнения (22) положителен только для возмущений с  $\omega^2 > -3c_A^2 k_z^2$ . В противном случае потенциал  $U$  чисто положительный, и не существует устойчивых состояний с отрицательной энергией. Для  $\omega^2 < 0$  знаменатель в (22) обращается в ноль. В нашей задаче (см. рис. 4) есть несколько характерных точек: внутренний радиус диска  $r_{\text{in}}$ , точка поворота  $r_1$  для данной отрицательной энергии  $E = -k_z^2$ , нулевая точка потенциала  $r_0$  и  $r_{\text{max}} = (3/2)r_0$ , где потенциал максимален. Очевидно, что  $r_{\text{in}} \leq r_1 \leq r_0$

Потенциал обращается в ноль в точке

$$r_0 = \frac{4}{3} GM \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2 \right]}{\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2} = \frac{4}{3} \frac{GM}{c_A^2} \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2}. \quad (23)$$

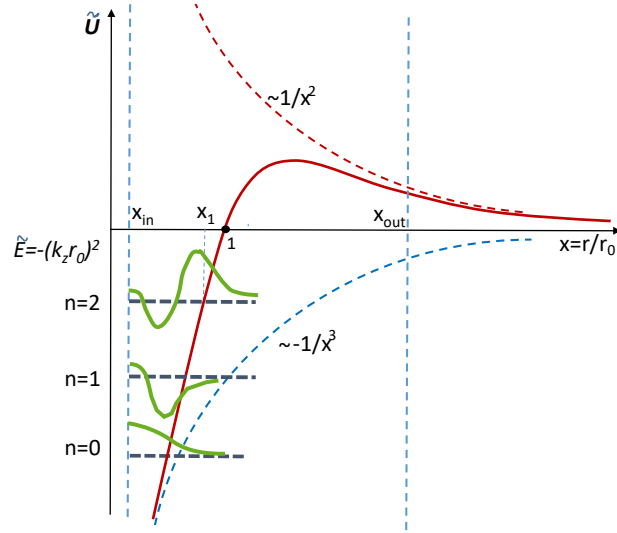


Рис. 4: Схема эффективного потенциала  $\tilde{U}$  с характерными точками  $x_{\text{in}}$  (внутренняя граница течения),  $x_1$  (точка поворота в потенциале для данного уровня),  $x = 1$  (точка обращения потенциала в ноль), и  $x_{\text{out}}$  (внешний радиус течения). Показаны первые три энергетических уровня ( $n = 0, 1, 2$ ) и соответствующие им собственные функции задачи (зеленым цветом) в случае  $x_{\text{out}} > 1$ .

Удобно ввести безразмерную переменную  $x = r/r_0$ . Тогда безразмерный потенциал можно записать в виде

$$\tilde{U} = U r_0^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^3}. \quad (24)$$

Безразмерная энергия в уравнении Шрёдингера (17) равна

$$\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2. \quad (25)$$

Точка поворота потенциала  $U$  находится из уравнения

$$-k_z^2 - U(r_1) = 0. \quad (26)$$

(см. рис. 4). За радиусом  $r_1$  возмущения квазиэкспоненциально затухают. В безразмерных единицах точка поворота  $x_1 = r_1/r_0$  потенциала  $\tilde{U}$  находится

из уравнения:

$$4\tilde{E}x_1^3 - 3x_1 + 3 = 0, \quad x_1 \leq 1. \quad (27)$$

При отрицательной энергии  $\tilde{E}$  это кубическое уравнение имеет один вещественный корень  $x_1 = r_1/r_0 < 1$ :

$$x_1 = \left( \frac{3}{-8\tilde{E}} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{9\tilde{E}}} \right)^{1/3} + \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{9\tilde{E}}} \right)^{1/3} \right]. \quad (28)$$

Численные решения уравнения (17) можно найти в Приложении А. Отметим, что глобальный нелокальный анализ магниторотационной неустойчивости, приводящий к уравнению, имеющему вид одномерного уравнения Шредингера (17), был исследован в [24, 21] с другими граничными условиями.

## 2.5 Вывод дисперсионного уравнения и критической альфвеновской скорости

Таким образом, в безразмерных переменных задача свелась к задаче Штурма-Лиувилля для уравнения

$$\Psi'' - \tilde{U}\Psi + \tilde{E}\Psi = 0 \quad (29)$$

с потенциалом (24) и граничными условиями

$$\left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x_{\text{in}}} + \frac{1}{2} \frac{\Psi}{x} \Big|_{x_{\text{in}}} = 0, \quad \left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x_{\text{out}}} + \frac{1}{2} \frac{\Psi}{x} \Big|_{x_{\text{out}}} = 0. \quad (30)$$

Так как потенциал  $\tilde{U}$  меняет знак в точке  $x = 1$  ( $r = r_0$ ), при решении этой задачи следует различать два случая: 1) внешний радиус течения находится за нулевой точкой потенциала  $x_{\text{out}} > 1$  ( $r_{\text{out}} > r_0$ ) и 2) течение обрывается до нулевой точки потенциала  $x_{\text{out}} < 1$  ( $r_{\text{out}} < r_0$ ) (см. подробнее в Приложениях А и В, соответственно). Из решения краевой задачи получается дискретный набор собственных значений  $\tilde{E}_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\tilde{E}_n = -k_z^2 r_0^2. \quad (31)$$

В случае  $x_{\text{out}} > 1$  число  $n$  соответствует числу нулей собственных функций на интервале между внутренней границей и точкой поворота потенциала для данного уровня  $[x_{\text{in}}, x_1(\tilde{E}_n)]$ .

Из уравнения (31) для каждого уровня с отрицательной энергией  $\tilde{E}_n$  получается дисперсионное уравнение

$$r_0 = \frac{\sqrt{-\tilde{E}_n}}{k_z} = \frac{4GM}{3c_A^2} \frac{\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2}. \quad (32)$$

В безразмерных единицах, нормированных на  $r_0$ , уравнение (32) – это квадратное уравнение для безразмерной величины  $\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}$ :

$$\frac{3}{4} \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} - 3 = 0, \quad v_\phi^2(r_0) \equiv \frac{GM}{r_0} = \frac{GMk_z}{\sqrt{-\tilde{E}_n}} \quad (33)$$

Его решение:

$$\omega^2 = c_A^2 k_z^2 \left(1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12 \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)}\right)^2}}{\frac{3}{2} \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)}\right)^2}\right). \quad (34)$$

Заметим, что в это дисперсионное уравнение входит скорость потока на радиусе  $r_0$  и не входят явно границы потока, на которых выполняются граничные условия; последние определяют набор собственных значений  $\tilde{E}_n$ .

Критическое магнитное поле, соответствующее нейтральной моде  $\omega^2 = 0$ , имеет вид

$$\left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)}\right)_{\text{cr}}^2 = 4, \quad (35)$$

то есть

$$(c_A)_{\text{cr}}^2 = \frac{4GM}{r_0} = \frac{4GMk_z}{\sqrt{-\tilde{E}_n}}. \quad (36)$$

Таким образом, в достаточно сильном магнитном поле сдвиговый поток стабилизируется силой Лоренца ( $\omega^2 = 0$ ), как это было впервые отмечено в



[6] для случая течения в узком зазоре между двумя проводящими цилиндрами.

Используя уравнение (35), перепишем уравнение (34) в виде:

$$\frac{\omega^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} = \left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left( 1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48 \left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2}}{6 \left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2} \right). \quad (37)$$

Ниже рассматриваются только неустойчивые режимы, при  $\omega^2 < 0$ , соответствующие знаку минус в уравнении (37). При малых  $\left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \ll 1$  уравнение (37) превращается в

$$\frac{\omega^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} \approx \left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left( -3 + 48 \left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \right). \quad (38)$$

т.е.  $\omega^2 \rightarrow 0$  при  $c_A^2 \rightarrow 0$ . Такое поведение  $\omega^2$  отличается от результата локального анализа, в котором МРН возникает и при произвольно малом (но ненулевом!) фоновом магнитном поле (см., например, [26]).

Очевидно, что существует максимальная скорость роста МРН и соответствующая ей альфвеновская скорость (см. Рис. 5)

$$\left( \frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)_{\text{max}}^2 = \frac{5}{16}, \quad \frac{\omega_{\text{max}}^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} = -\frac{3}{16}. \quad (39)$$

В реальных течениях всегда есть внутренний радиус  $r_{\text{in}}$ . При достаточно большом внешнем радиусе  $r_{\text{out}} \gg r_{\text{in}}$ , можно точно решить задачу и найти собственные значения  $\tilde{E}_n = -k_z^2 r_0^2$  (см. Приложение А), из которых можно рассчитать положение точки нуля  $r_0$  эффективного потенциала  $U(r)$ . В квази-классическом приближении решение  $\tilde{E}_n(x_{\text{in}})$ , где  $x_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_0$ , записывается через интеграл (85) (см. Приложение А). Тогда положение точки  $r_0$  в течении может быть рассчитано из решения задачи при заданном  $r_{\text{in}}$  по формуле  $r_0 = r_{\text{in}}/x_{\text{in}}$ . В частном случае малых  $k_z \approx 0$  (т.е.  $\tilde{E}_n \approx 0$ ) имеется аналитическое решение (см. (87), (88)):

$$r_0 = r_{\text{in}} \left\{ \left[ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left( n + \frac{3}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right]^2 + 1 \right\}. \quad (40)$$

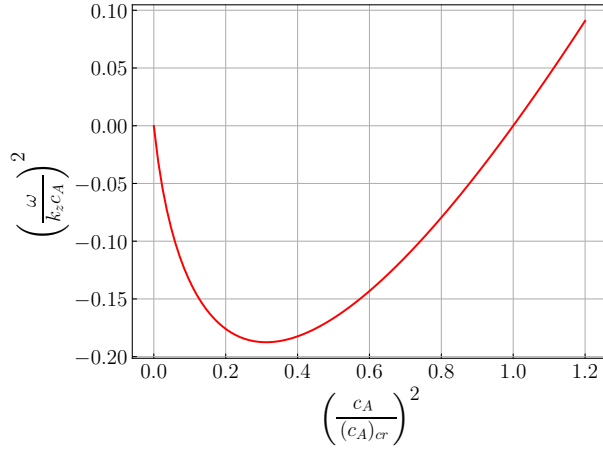


Рис. 5: Решение дисперсионного уравнения (37) со знаком минус перед квадратным корнем для неустойчивых мод  $\omega^2 < 0$ .

В случае  $r_{\text{out}} < r_0$  потенциал между границами не меняет знак, и задача о нахождении собственных значений уравнения (29) упрощается (см. Приложение В).

## 2.6 Применение к тонким аккреционным дискам

В аккреционных дисках длина возмущений по вертикальной координате  $\lambda = 2\pi/k_z$  должна быть меньше полутолщины диска  $h$ . Это условие ограничивает допустимые «энергетические уровни». Действительно, в точке поворота  $x_1$  мы имеем

$$\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2 = -4\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 \frac{1}{x_1^2}. \quad (41)$$

Поэтому требование

$$\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 = -\frac{4\pi^2}{x_1^2 \tilde{E}} \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 < 1 \quad (42)$$

дает допустимые уровни энергии, удовлетворяющие следующим условиям

$$x_1^2 |\tilde{E}| > \frac{4\pi^2}{(h/r_1)^2}. \quad (43)$$

Для типичного значения относительной толщины геометрически тонкого диска  $h/r \lesssim 0.1$  в тонких аккреционных дисках это дает  $x_1^2 |\tilde{E}| > 4 \times 10^3$ . Помня, что для больших  $|\tilde{E}| \gg 1$ ,  $x_1 \approx \left(\frac{3}{4|\tilde{E}|}\right)^{1/3}$  (см. уравнение (28)), соответствующие уровни энергии должны иметь  $|\tilde{E}| > 7 \times 10^{10}$ . Такие уровни возможны только для очень малых  $x_{\text{in}} \ll 1$  (см. Приложение А, рис. (13)).

Критическое магнитное поле, выше которого МРН подавляется, может быть выражено через кеплеровскую скорость на внутренней границе течения  $v_\phi(r_{\text{in}})$ :

$$(c_A)_{\text{cr}}^2 = \frac{4GM}{r_0} = x_{\text{in}} \frac{4GM}{r_{\text{in}}} = 4x_{\text{in}} v_\phi^2(r_{\text{in}}). \quad (44)$$

Нетрудно получить верхний предел на возможное значение безразмерного параметра  $x_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_0$ . Действительно, все возможные уровни энергии могут принимать значения

$$-\tilde{E}_n = \frac{r_{\text{in}}^2 k_z^2}{x_{\text{in}}^2} < -\tilde{U}(x_{\text{in}}) = \frac{3}{4} \frac{1}{x_{\text{in}}^3} - \frac{3}{4} \frac{1}{x_{\text{in}}^2}, \quad (45)$$

откуда

$$x_{\text{in}} < \frac{1}{1 + \frac{4}{3} r_{\text{in}}^2 k_z^2}. \quad (46)$$

Отметим, что это неравенство дает очевидный верхний предел  $x_{\text{in}} < 1$  для  $k_z \rightarrow 0$ , тогда, как показано в Приложении А, уровни энергии с  $n = 0$  имеются только при  $x_{\text{in}} < 0.8116$ . Подставляя неравенство (46) в (44), получаем верхний предел критического магнитного поля:

$$(c_A)_{\text{cr}}^2 < \frac{4v_\phi^2(r_{\text{in}})}{1 + \frac{4}{3} r_{\text{in}}^2 k_z^2}. \quad (47)$$

Пользуясь условием для тонких дисков для длины волны возмущений по  $z$ -координате  $\lambda/h = 2\pi k_z/h < 1$  и учитывая  $h/r_{\text{in}} < 1$ , преобразуем (47) к виду

$$\frac{(c_A)_{\text{cr}}}{v_\phi(r_{\text{in}})} < \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{h}{r_{\text{in}}}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{h}}, \quad \frac{(c_A)_{\text{cr}}}{c_s(r_{\text{in}})} < \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{h}}. \quad (48)$$

(В последнем равенстве воспользовались связью кеплеровской скорости и скорости звука на внутренней границе тонкого аккреционного диска  $c_s(r_{\text{in}}) = v_\phi(r_{\text{in}})(h/r_{\text{in}})$ ).

Таким образом, в тонких аккреционных дисках МРН-возмущения с длиной волны по  $z$ -координате  $\lambda < h$  могут быть значительно подавлены.

В зависимости от типа аккретора (обычные звезды или релятивистские компактные объекты) внутренний радиус течения может сильно изменяться от нескольких десятков км до млн км, а внешний радиус определяется физической ситуацией – например, ограничивается размером полости Роша в случае двойных систем. Поскольку в тонких дисках  $h/r \sim 0.05$ , верхний предел критического магнитного поля, подавляющего МРН в тонких дисках (48),  $\sim 1/\sqrt{r_{\text{in}}}$  и значительно отличается для разных типов аккреторов.

Преыдущие исследования критического магнитного поля для подавления МРН в рамках глобального анализа при других граничных условиях можно найти, например, в работах [18, 22]. В работе [18] критическое магнитное поле выводилось энергетическим методом. Была получена только верхняя оценка, согласно которой (уравнение (41) в цитируемой работе) критическое магнитное поле в тонких дисках определяется альвеновской скоростью, равной круговой скорости течения, умноженной на корень из отношения полутолщины диска к радиусу. Отметим также, что критическая альвеновская скорость в локальном анализе [10] с точностью до множителя равна круговой скорости, умноженной на отношение длины волны возмущений по  $z$ -координате к радиусу. Как видно из сравнения этих утверждений с (48), наш результат дает гораздо более определенное значение критического поля.

### 3 Магниторотационная неустойчивость с альвеновской скоростью, зависящей от радиуса

До сих пор при рассмотрении МРН мы ограничивались случаем постоянной фоновой альвеновской скорости. Однако в реальных астрофизических ситуациях альвеновская скорость должна уменьшаться с радиусом как минимум также, как угловая скорость течения или даже быстрее. Мы рассмотрим ниже два случая: (1) когда  $c_A^2$  зависит от радиуса как  $v_\phi^2 \propto 1/r$  из-за переменной по радиусу плотности при постоянном фоновом поле и (2) когда  $c_A^2 \propto 1/r^q$  при переменном фоновом магнитном поле с постоянной плотностью по радиусу.

### 3.1 Случай постоянного фонового магнитного поля

Квадрат альфвеновской скорости может линейно уменьшаться с радиусом, когда фоновое магнитное поле постоянно, но плотность течения увеличивается *линейно с радиусом*. Заметим, что переменная с радиусом плотность по-прежнему предполагает использование уравнение неразрывности в виде (5). Перепишем уравнение (1) в виде

$$1/\rho(\partial\rho/\partial t + \mathbf{u}\nabla\rho) + \nabla \cdot \mathbf{u} = D \ln \rho/Dt + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Теперь уже локально плотность  $\rho$  меняется (эйлерова производная  $\partial\rho/\partial t \neq 0$ ), однако субстанциональная (лагранжева) производная от плотности от времени  $D\rho/Dt = \partial\rho/\partial t + \mathbf{u}\nabla\rho = 0$ ,  $D \ln \rho/Dt = 0$ , то есть для несжимаемой жидкости в случае переменной по координатам плотности уравнение неразрывности будет  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  [29, 30]. Таким образом, для переменной фоновой плотности  $\rho_0$  уравнения (5–12) для линейных возмущений не меняются. Однако, вместо потенциала (22) с  $c_A^2 = \text{const}$ , эффективный потенциал принимает вид

$$U_e = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r^3 c_A^2} \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r^3} \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} + 3\epsilon v_\phi^2(r) \right]}{\left( \epsilon v_\phi^2(r) - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (49)$$

Здесь  $\epsilon \equiv c_A^2/v_\phi^2 = \text{const}$  – параметр. В этом потенциале имеются те же характерные точки, как и предыдущем случае (см. раздел 2.4):  $r_0$ , где  $U_e(r_0) = 0$ , точка поворота  $r_1$ , где  $E - U_e(r_1) = 0$ , и внутренний радиус потока  $r_{\text{in}}$ .

Потенциал  $U_e$  обращается в ноль в точке

$$r_0 = \frac{4}{3} GM \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} + 3\epsilon v_\phi^2(r_0) \right]}{\left( \epsilon v_\phi^2(r_0) - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (50)$$

Из этого уравнения находим дисперсионное уравнение  $\omega(k_z)$ :

$$\frac{3}{4} \epsilon \left( 1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 \epsilon v_\phi^2(r_0)} \right)^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 \epsilon v_\phi^2(r_0)} - 3 = 0 \quad (51)$$

с решением

$$\omega^2 = \epsilon v_\phi^2(r_0) k_z^2 \left( 1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12\epsilon}}{\frac{3}{2}\epsilon} \right). \quad (52)$$

Режим МРН соответствует знаку минус перед квадратным корнем. Как и в разделе 2.5, критическое магнитное поле соответствует нейтральной моде  $\omega^2 = 0$ :

$$\epsilon_{\text{cr}} = \left( \frac{c_A(r_0)}{v_\phi(r_0)} \right)^2 = 4. \quad (53)$$

Для малых  $\epsilon \ll 1$ ,

$$\omega^2 \approx \epsilon v_\phi(r_0)^2 k_z^2 (-3 + 12\epsilon). \quad (54)$$

Видно, что уравнение (52) дает такие же максимальную скорость роста МРН и соответствующее ей значение альфвеновской скорости, что и ранее (ср. уравнение (39)):

$$\epsilon = \left( \frac{c_A(r_0)}{v_\phi(r_0)} \right)_{\text{max}}^2 = \frac{5}{4}, \quad \omega_{\text{max}}^2 = -\frac{3}{4} k_z^2 v_\phi^2(r_0). \quad (55)$$

Очевидно, что критическая альфвеновская скорость такая же как и выше (35).

Теперь рассмотрим точку поворота  $r_1$  в потенциале  $U_e$ , определяемую из уравнения  $-k_z^2 - U_e(r_1) = 0$ . В безразмерных переменных  $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$ ,  $x = r/r_0$ , уравнение для  $x_1$  имеет вид:

$$\tilde{E} - \tilde{U}_e = \tilde{E} - \frac{3}{4} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{\epsilon x_1^2} \frac{3 + x_1 K(\epsilon)}{(1 - x_1 K(\epsilon))^2} = 0, \quad (56)$$

где

$$K(\epsilon) = \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2(r_0)} = \left( 1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 12\epsilon}}{\frac{3}{2}\epsilon} \right). \quad (57)$$

Обратим внимание, что «притягивающая» часть потенциала в уравнении (56) зависит от параметра  $\epsilon$ . Заметим также, что в этом случае при малых  $x \ll 1$  «отталкивающий» потенциал ведет себя как  $1/x^2$  по сравнению с  $1/x^3$  в случае ((24)). Уравнение (56) – это уравнение четвёртой степени для

$x_1$  (ср. кубическое уравнение для  $x_1$  в случае с постоянной  $c_A^2$  (27)). При малых  $x_1 \ll 1$  решение имеет вид

$$x_1^2 \approx -\frac{3}{\tilde{E}} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (58)$$

(ср. с уравнением (28) для постоянной альфвеновской скорости).

### 3.2 Случай с радиально зависимым фоновым магнитным полем

Если фоновое магнитное поле зависит от радиуса,  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(r))$ , линейаризованные уравнения МГД становятся более сложными. Радиальная и вертикальная компоненты уравнения Эйлера (7) и (9) теперь записываются соответственно как:

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left[ \frac{\partial(b_z B_z)}{\partial r} + ik_z b_r B_z \right], \quad (59)$$

$$i\omega u_z = ik_z \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{1}{4\pi\rho_0} b_r \frac{\partial B_z}{\partial r}. \quad (60)$$

Вертикальная компонента уравнения индукции (12) превращается в

$$i\omega b_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r B_z)}{\partial r}. \quad (61)$$

Действуя так же, как в разделе (2.4), после некоторых алгебраических преобразований мы получаем уравнение для  $b_r$  в виде:

$$\begin{aligned} & (c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2}) \left[ \frac{\partial^2 b_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_r}{r} \right) - b_r k_z^2 \right] + \frac{2\Omega \left( \frac{\omega^2}{k_z^2} \frac{\kappa^2}{2\Omega} - c_A^2 r \frac{d\Omega}{dr} \right)}{(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2})} b_r = \\ & \frac{\partial c_A^2}{\partial r} \left\{ -\frac{b_r}{2r} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \left[ -\frac{b_r}{2r} - \frac{\partial b_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{(\partial^2 c_A^2 / \partial r^2)}{(\partial c_A^2 / \partial r)} b_r + \frac{3}{4c_A^2} \frac{\partial c_A^2}{\partial r} b_r \right] \right\}. \quad (62) \end{aligned}$$

Для  $c_A^2 = \text{const}$  правая часть уравнения зануляется. Ниже ограничимся случаем степенного поведения альфвеновской скорости от радиуса.

Подстановка  $c_A^2 \propto r^{-q}$  в уравнение (62) дает для кеплеровского течения ( $\chi^2 = \Omega^2 = GM/r^3$ )

$$\frac{\partial^2 b_r}{\partial r^2} + \left[ 1 - q \frac{\frac{1}{2}c_A^2 + \frac{\omega^2}{k_z^2}}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2}\right)} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_r}{r} \right) + b_r \left\{ -k_z^2 + \frac{GM}{r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2\right]}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2}\right)^2} + \frac{q}{r^2} \frac{\left(-\frac{q}{4} - 1\right) \frac{\omega^2}{k_z^2} - c_A^2}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2}\right)} \right\} = 0. \quad (63)$$

Уравнение (63) может быть переписано как

$$b_r'' + g(r)b_r' + f(r) = 0, \quad (64)$$

$$g(r) = \frac{1}{r} \frac{\left(1 - \frac{q}{2}\right) - (q+1) \left(\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)} \quad (65)$$

$$f(r) = -k_z^2 + \frac{GM}{c_A^2 r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3\right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2} - \frac{g(r)}{r} + \frac{q}{r^2} \frac{\left(-\frac{q}{4} - 1\right) \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} - 1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)} \quad (66)$$

Первая производная из этого уравнения может быть исключена стандартным способом путем замены  $z = b_r \exp\{-\frac{1}{2} \int^r g(s) ds\}$ , что приводит к уравнению

$$z'' + \left( f - \frac{g'}{2} - \frac{g^2}{4} \right) z = 0. \quad (67)$$

Подставляя в (67) функции  $f$  и  $g$ , мы получаем уравнение

$$z'' + \left\{ -k_z^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{q}{r^2} \frac{\frac{q}{16} + \frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2} + \frac{GM}{c_A^2 r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3\right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2} \right\} z = 0. \quad (68)$$

Очевидно, что оно сводится к уравнению (17) для постоянного фонового поля  $q = 0$ . Для случая  $q \neq 0$  эффективный потенциал в уравнении, подобном уравнению Шрёдингера (68), имеет вид:

$$U_q = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{q}{r^2} \frac{\frac{q}{16} + \frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2} - \frac{GM}{c_A^2 r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3\right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2} \quad (69)$$



Потенциал  $U_q$  обращается в ноль при любом  $q$  в точке

$$r_0 = \frac{GM}{c_A^2} \frac{\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3}{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \left(\frac{q^2}{4} + \frac{q}{2}\right) + \left(\frac{q^2}{16} + \frac{q}{2}\right)} \quad (70)$$

Дисперсионное уравнение в точке  $r_0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2(r_0)} &= 1 + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{6} + \frac{2}{3} \left(\frac{v_\phi(r_0)}{c_A(r_0)}\right)^2 \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{6} + \frac{q}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{v_\phi(r_0)}{c_A(r_0)}\right)^2\right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{v_\phi(r_0)}{c_A(r_0)}\right)^2 + \frac{q^2}{4}}. \end{aligned} \quad (71)$$

Режим МРН соответствует знаку минус перед квадратным корнем. Нулевая мода  $\omega^2 = 0$  соответствует критическому магнитному полю

$$\epsilon_{cr} \equiv \left(\frac{c_A(r_0)}{v_\phi(r_0)}\right)_{cr}^2 = \frac{48}{12 + 8q + q^2}. \quad (72)$$

Используя тождество

$$\left(\frac{v_\phi}{c_A}\right)^2 = \left(\frac{v_\phi}{(c_A)_{cr}}\right)^2 \left(\frac{(c_A)_{cr}}{c_A}\right)^2, \quad (73)$$

перепишем дисперсионное уравнение (71) в форме, аналогичной (37), как функцию от безразмерной величины  $\left(\frac{(c_A)_{cr}}{c_A}\right)^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{(c_A)_{cr}^2 k_z^2} &= \left(\frac{c_A}{(c_A)_{cr}}\right)^2 \left[1 + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{6} + \frac{2}{3} \left(\frac{v_\phi}{c_A}\right)^2\right. \\ &\left. \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{6} + \frac{q}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{v_\phi}{c_A}\right)^2\right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{v_\phi}{c_A}\right)^2 + \frac{q^2}{4}}\right]. \end{aligned} \quad (74)$$

(см. Рис. (6)). (В формуле (74)  $\left(\frac{v_\phi}{c_A}\right)^2$  выражается через (72) и (73)).

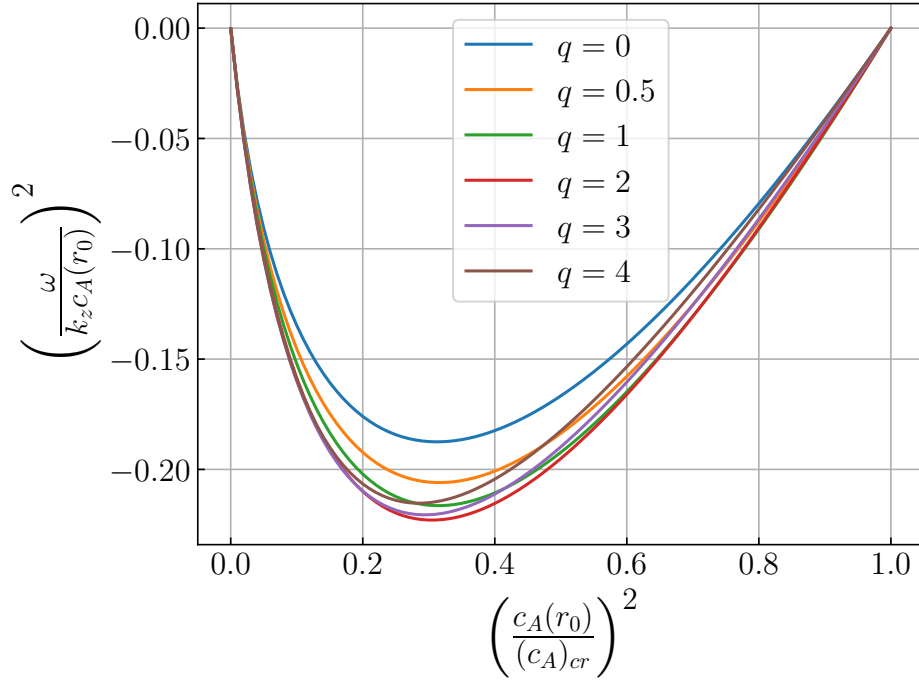


Рис. 6: Дисперсионные кривые МРН (74) для различных  $q$ . В пределе  $c_A/[c_A]_{cr} \ll 1$  дисперсионное уравнение имеет вид (38) для всех  $q$ .

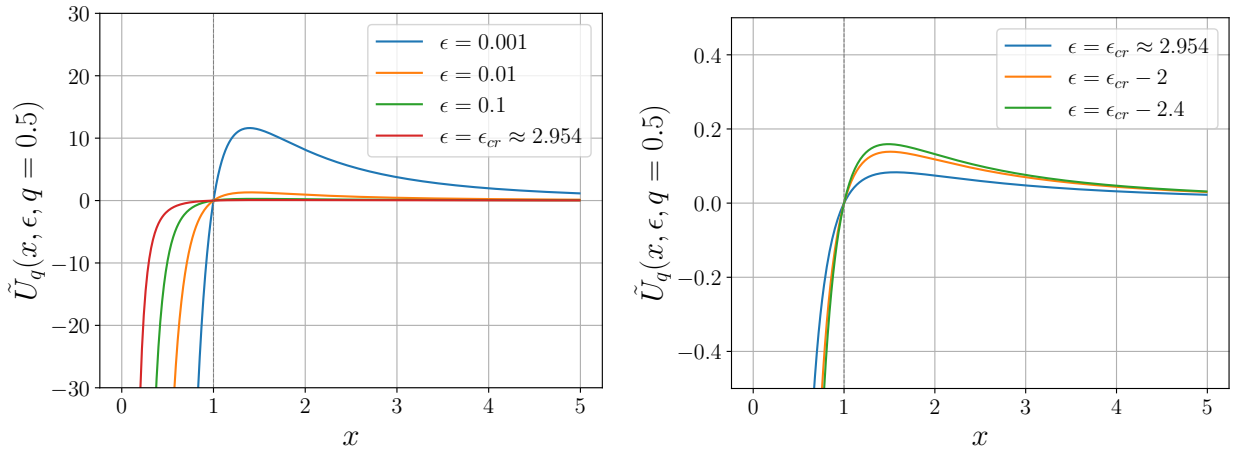


Рис. 7: Эффективный потенциал  $\tilde{U}_q(x, \epsilon, q)$  (75) для  $q = 0.5$  и различных значений параметра  $\epsilon = c_A^2(r_0)/v_\phi^2(r_0)$ . Критическое значение  $\epsilon_{cr}$  находится из уравнения (72).

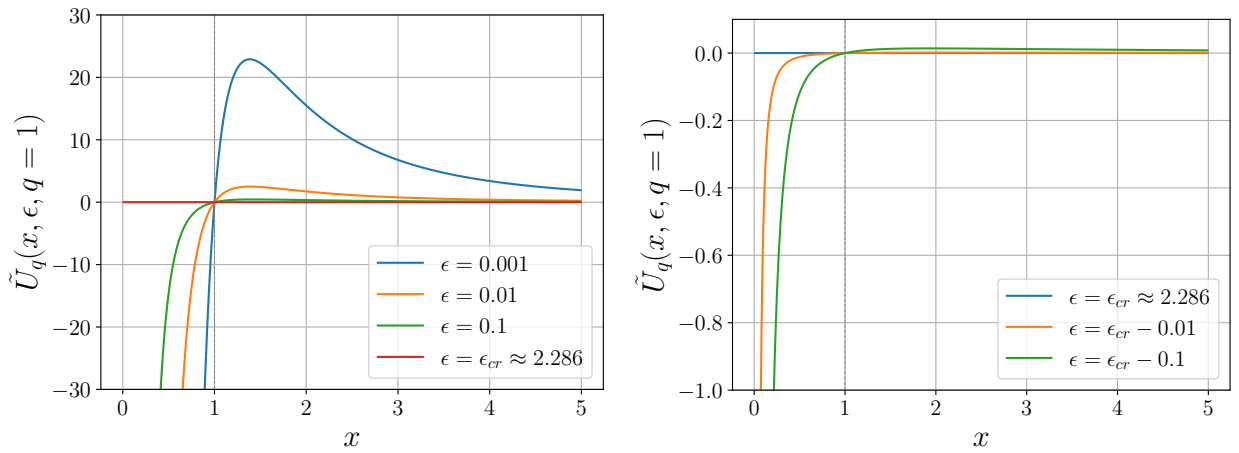


Рис. 8: То же, что на Рис. 7 для  $q = 1$ .

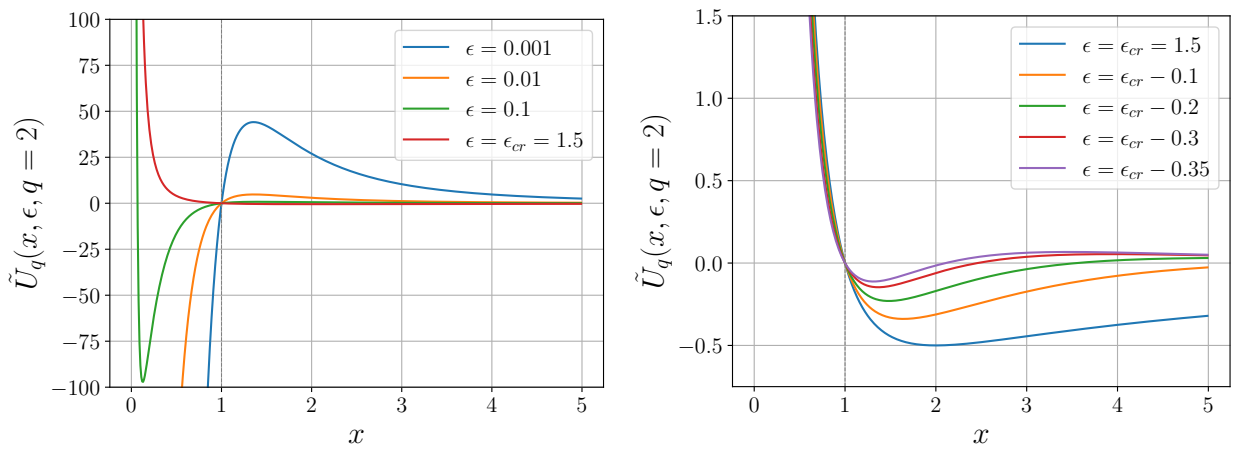


Рис. 9: То же, что на рис. 7 для  $q = 2$ . Отметим появление второй нулевой точки потенциала с уменьшением параметра  $\epsilon$ .

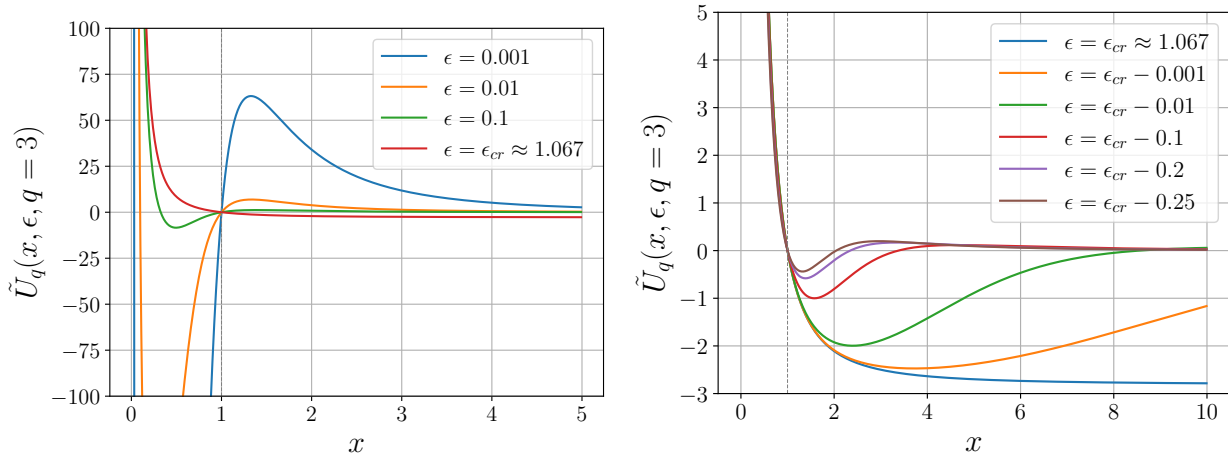


Рис. 10: То же, что на рис. 7 для  $q = 3$ .

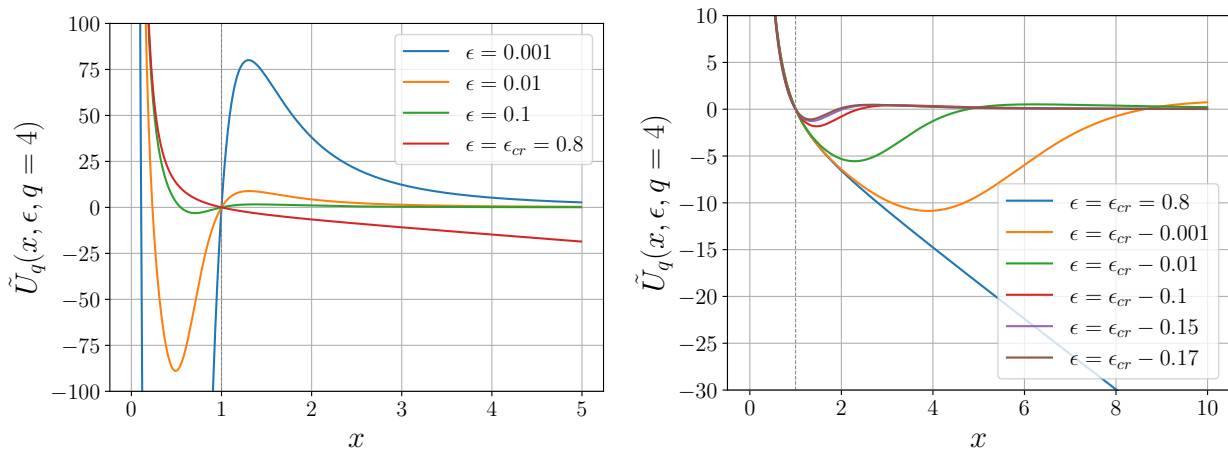


Рис. 11: То же, что на Рис. 7 для  $q = 4$ .

Используем, как и выше, безразмерные переменные  $x = r/r_0$ ,  $c_A^2 = c_A^2(r_0)x^{-q}$ , параметр  $\epsilon = (c_A^2(r_0)/v_\phi^2(r_0))$  и обозначим правую часть из уравнения (71)  $\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2(r_0)} = K(\epsilon)$ . Тогда безразмерный потенциал  $\tilde{U}_q = U_q r_0^2$  принимает вид

$$\tilde{U}_q(x, \epsilon, q) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{16}q^2 + \frac{q}{2} - K(\epsilon)x^q(\frac{q^2}{4} + \frac{q}{2})}{(1 - K(\epsilon)x^q)^2} \right) - \frac{1}{x^{3-q}} \frac{(3 + K(\epsilon)x^q)}{\epsilon(1 - K(\epsilon)x^q)^2}. \quad (75)$$

Заметим, что в случае  $q \neq 0$ , как «отталкивающая», так и «притягивающая» части эффективного потенциала зависят от  $\epsilon$ .

Обсудим некоторые особенности потенциала  $\tilde{U}_q$ .

1. По построению,  $\tilde{U}_q(1, \epsilon, q) = 0$  для любого  $\epsilon, q$ .
2. При  $\epsilon \rightarrow \epsilon_{\text{cr}}$  (72),  $K(\epsilon) \rightarrow 0$ :

$$\tilde{U}_q(x, \epsilon \rightarrow \epsilon_{\text{cr}}, q) = \left( \frac{3}{4} + \frac{q^2}{16} + \frac{q}{2} \right) \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^{3-q}} \right). \quad (76)$$

Потенциал  $\tilde{U}_q(x, \epsilon \rightarrow \epsilon_{\text{cr}}, q = 1) = 0$  для любого  $x$ . Для  $q < 1$ ,  $\tilde{U}_q$  меняет знак с отрицательного на положительный при  $x = 1$ , и наоборот для  $q > 1$ .

3. Для  $q < 1$  существует только одна нулевая точка потенциала:  $\tilde{U}_q(x = 1, \epsilon, q < 1) = 0$ .
4. Для  $q > 1$ , при  $x < 1$  в потенциале  $\tilde{U}_q$  появляется вторая нулевая точка  $x_2$  с предельным поведением  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_2 = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{U}_q(x, \epsilon, q) \rightarrow +\infty$ . То есть потенциал достигает минимума в некоторой точке  $x_{\text{min}}$ :  $x_2 < x_{\text{min}} < 1$ .

Эти особенности эффективного потенциала  $\tilde{U}_q$  для различных  $q$  и  $\epsilon$  показаны на рис. (7)-(11). Видно, что для  $q \leq 1$  эффективный потенциал  $\tilde{U}_q$  имеет ту же форму, что и для  $q = 0$  (см. рис. 4), и анализ режимов МРН не меняется. Для  $q > 1$  появляется минимум эффективного потенциала  $x_2 < x_{\text{min}} < 1$ , и неустойчивые уровни энергии следует искать

между двумя точками поворота для соответствующих эффективных энергий  $\tilde{E} = -k_z r_0^2$ . В отличие от случая  $q = 0$  существует минимум энергии  $\tilde{E}_{\min} = \tilde{U}_q(x_{\min}, \epsilon, q)$ .

Важно отметить, что для случаев с  $q > 1$  и  $x_{\text{in}} \ll 1$ , для уровней энергии  $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$ , могут появиться две точки поворота в эффективном потенциале  $\tilde{U}_q$  ( $[x_1]_{\min}$  и  $[x_1]_{\max}$ ). Возможно также, что  $\tilde{E} < [\tilde{U}_q]_{\min}$ , и стабильных отрицательных уровней энергии (соответствующих модам МРН) не существует. Если безразмерный радиус внутреннего диска  $x_{\text{in}}$  попадает между корнями эффективного потенциала  $\tilde{U}_q$ , то в точке  $x_{\text{in}}$  возникает свободная граница течения как в рассмотренном выше случае  $q = 0$ .

Таким образом, анализ формы эффективного потенциала  $\tilde{U}_q$  свидетельствует о необходимости его учета при рассмотрении глобальной МРН в конкретных физических случаях.

## 4 Итоги и обсуждение

**1. Нелокальный модальный анализ с постоянным фоновым магнитным полем.** Мы заново рассмотрели развитие магниторотационной неустойчивости в кеплеровских течениях идеальной жидкости. Мы показали, что учет радиальной нелокальности при анализе возмущений в форме  $f(r)e^{i(\omega t - k_z z)}$  приводит к появлению члена  $-\frac{3}{4}\frac{1}{r^2}$  в уравнении (17) для малых возмущений. Уравнение для малых возмущений имеет вид стационарного уравнения Шредингера с эффективным потенциалом, определяющим (в виде дисперсионного уравнения) область отрицательных значений  $\omega^2$  — область роста МРН. Нейтральной моде  $\omega^2 = 0$  соответствует критическое магнитное поле (36). Критическое поле в терминах альфвеновской скорости  $c_A^2$  равно  $(c_A)_{\text{cr}}^2 = 4GM/r_0$ , где  $r_0$  — нулевая точка потенциала  $U$  (22) в уравнении (17).

Вторым важным результатом является значительное уменьшение (по сравнению с локальным анализом) скорости роста МРН для случая  $c_A^2 \ll (c_A)_{\text{cr}}^2$  (см. уравнение (38)). Действительно, пренебрегая членом  $-\frac{3}{4}\frac{1}{r^2}$  в уравнении (17) и заменяя производную  $\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow -ik_r$ , уравнение (17) превращается

в алгебраическое уравнение четвертой степени с решением

$$\omega^2 = \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 \left[ c_A^2 k_z^2 + \frac{\Omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\Omega^4}{4} + 4\Omega^2 c_A^2 k^2} \right] \quad (77)$$

(здесь  $k^2 = k_r^2 + k_z^2$ ). Максимальная скорость роста неустойчивости в этом случае не зависит от напряженности магнитного поля:

$$\omega_{\max}^2 = -\frac{9}{16} \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 \Omega^2. \quad (78)$$

Мы подчеркиваем разницу между локальным результатом (78) и нелокальным результатом (39). В нелокальном подходе появляется критическое магнитное поле, подавляющее МРН, которое отсутствовало в локальном модальном анализе (см., например, в [10, 31]). В глобальном анализе максимальная скорость роста МРН достигается при определенном значении альфвеновской скорости,  $(c_A/(c_A)_{cr})^2 = 5/16$  (см. Рис 5 и (39)). Тот факт, что МРН возникает только при достаточно слабом магнитном поле, был отмечен уже в первой работе Бальбуса и Хаули [10] (см. также, например, более поздние исследования [32, 33] и т.д.). При малых магнитных полях,  $c_A \ll (c_A)_{cr}$ , инкремент неустойчивости подавляется на фактор  $3(c_A/(c_A)_{cr})$ , см. уравнение (38).

Мы отмечаем, что, как показывает численный анализ (см. Приложение А), в «мелких» потенциальных ямах с безразмерным внутренним радиусом течения  $x_{in} = r_{in}/r_0 > 0.8$  не существует стационарных собственных мод (17), т.е. там отсутствует МРН. При  $x_{in} = r_{in}/r_0 < 0.8$  возникают стационарные уровни, соответствующие очень малым  $k_z$  и большим длинам волн возмущений. Число стационарных уровней возрастает по мере уменьшения  $x_{in}$ . В тонких кеплеровских аккреционных дисках возмущения с длинами волн  $\lambda = 2\pi/k_z$  меньше полутолщины диска  $h$  существуют только в «глубоких» потенциальных ямах с  $\log x_{in} < -3.756$ . Поэтому МРН в стандартной формулировке (сдвиговый поток, погруженный в постоянное полоидальное магнитное поле) не всегда работает в тонких аккреционных дисках. Например, в аккреционных дисках вокруг обычных звезд (неглубокие потенциалы) внутренний радиус диска может быть слишком большим для

появления коротковолновых неустойчивых мод, в то время как в аккреционных дисках вокруг компактных звезд (глубокие потенциалы) возможны неустойчивые моды с длиной волны меньше толщины диска.

**2. Нелокальный модальный анализ с радиально изменяющимся фоновым магнитным полем.** Мы впервые провели нелокальный модальный анализ МРН с переменной фоновой альфвеновской скоростью  $c_A(r)$  и подробно рассмотрели случай степенной зависимости  $c_A^2(r) \propto r^{-q}$  в кеплеровских течениях (уравнения для малых возмущений поля (62) и (63), соответственно). Мы обнаружили, что максимальная скорость роста МРН увеличивается с ростом  $q$  (Рис. 6). Кроме того, в этом случае безразмерный потенциал  $\tilde{U}_q$  (75) зависит как от  $q$ , так и от параметра  $\epsilon = c_A^2(r_0)/v_\phi^2(r_0)$ . Для  $q > 1$  потенциал  $\tilde{U}(q, \epsilon)$  качественно меняется с уменьшением  $\epsilon$  от критического значения (соответствующего нулевой моде  $\omega^2 = 0$ , (72)): появляются две точки поворота справа и слева от нулевой точки  $r_0$  (см. рис. (9)-(11)). Очевидно, что результат нелокального анализа МРН будет зависеть от положения внутренней границы потока  $x_{\text{in}}$  относительно нулевых точек эффективного потенциала.

Таким образом, нелокальный анализ МРН показывает необходимость учета специфических особенностей течения. Мы рассмотрели здесь только полоидальное фоновое магнитное поле. В реальных ситуациях могут существовать как полоидальные, так и тороидальные компоненты фонового магнитного поля. Глобальный анализ неосесимметричных возмущений для МРН проводился, например, в работе [34]. Тороидальное магнитное поле в плоскости диска должно быть подвержено паркероуской неустойчивости [9], которая возникает в поле тяжести (см. рис. (12)). Подробное описание паркероуской неустойчивости в аккреционных дисках см. например, в [15]. Неустойчивость Паркера в аккреционных дисках может быть названа «магнито-гравитационной неустойчивостью».

## Благодарности

Мы благодарны рецензентам за внимательное прочтение статьи и критические замечания, позволившие значительно улучшить представление полученных результатов. Работа поддержана грантом РФФ 21-12-00141. Авторы благодарят участников семинаров отдела релятивистской астрофизики ГА-



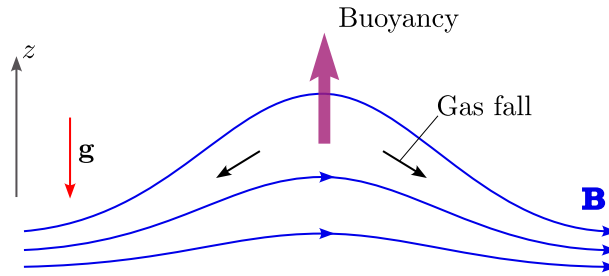


Рис. 12: Схема паркеровской неустойчивости.

ИШ МГУ и теоретдела ФИАН за полезные обсуждения.

## Список литературы

1. Shakura N I, Sunyaev R A *A&A* **24** 337 (1973)
2. Bisnovatyi-Kogan G S, Lovelace R V E *New Astron.* **45**(11-12) 663 (2001)
3. Lipunova G, Malanchev K, Shakura N in N Shakura (Ed.) *Astrophysics and Space Science Library* volume 454 of *Astrophysics and Space Science Library* 1 (2018)
4. Boneva D V et al. *A&A* **652** A38 (2021)
5. Somov B V et al. *Advances in Space Research* **32**(6) 1087 (2003)
6. Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **36** 1398 (1959)
7. Chandrasekhar S *Proceedings of the National Academy of Science* **46** 253 (1960)
8. Lord Rayleigh *Proc. R. Soc. A* **93** 148 (1917)
9. Parker E N *ApJ* **145** 811 (1966)
10. Balbus S A, Hawley J F *ApJ* **376** 214 (1991)
11. Balbus S A, Hawley J F *Reviews of Modern Physics* **70** 1 (1998)

12. Hawley J F, Gammie C F, Balbus S A *ApJ* **440** 742 (1995)
13. Sorathia K A et al. *ApJ* **749** 189 (2012)
14. Hawley J F et al. *ApJ* **772** 102 (2013)
15. Kato S, Fukue J, Mineshige S *Black-hole accretion disks*, (Kyoto, Japan: Kyoto University Press1998)
16. Shakura N, Postnov K *MNRAS* **451**(4) 3995 (2015)
17. Zou R et al. **101**(1) 013201 (2020)
18. Papaloizou J, Szuszkiewicz E *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **66**(1) 223 (1992)
19. Kumar S, Coleman C S, Kley W *MNRAS* **266** 379 (1994)
20. Gammie C F, Balbus S A *MNRAS* **270** 138 (1994)
21. Curry C, Pudritz R E, Sutherland P G *ApJ* **434** 206 (1994)
22. Latter H N, Fromang S, Faure J *MNRAS* **453**(3) 3257 (2015)
23. Knobloch E *MNRAS* **255** 25P (1992)
24. Dubrulle B, Knobloch E *A&A* **274** 667 (1993)
25. Shakura N I, Lipunova G V *MNRAS* **480**(3) 4273 (2018)
26. Shakura N, Postnov K *MNRAS* **448**(4) 3697 (2015)
27. Ландау Л, Лифшиц Е *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, (М.: Наука1989)
28. Flugge S *Practical Quantum Mechanics, 2 volumes*, (Berlin, New York, Springer-Verlag1971)
29. Ландау Л, Лифшиц Е *Гидродинамика*, (М.: Наука1986)
30. Acheson D *Elementary Fluid Dynamics*, (Oxford, Clarendon Press1990)

31. Shakura N, Postnov K in N Shakura (Ed.) *Astrophysics and Space Science Library* volume 454 of *Astrophysics and Space Science Library* 393 (2018)
32. Salmeron R, Königl A, Wardle M *MNRAS* **375**(1) 177 (2007)
33. Bai X N, Stone J M *ApJ* **769**(1) 76 (2013)
34. Curry C, Pudritz R E *MNRAS* **281**(1) 119 (1996)

## А Численное решение уравнения (17) при $r_{\text{out}} > r_0$

Решим непосредственно уравнение (17) в случае, когда внешняя граница течения лежит за точкой  $r_0$ , в которой потенциал  $U(r_0) = 0$ . В безразмерных переменных  $x = r/r_0$  и  $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$ , уравнение (17) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left\{ \tilde{E} - \tilde{U} \right\} \Psi = 0, \quad \tilde{U} = \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^3} \quad (79)$$

Амплитуда функции  $\Psi$  произвольна, выбираем  $|\Psi(x_1)| = 1$ . Граничные условия на границах течения ставятся согласно (30).

Можно упростить численное нахождение решения, поставив граничное условие на внешней границе не в точке  $x_{\text{out}} > 1$ , а в точке поворота  $x_1 < 1$ . В точке поворота  $x_1$  условие  $\Psi''(x_1) = 0$  автоматически удовлетворяется по смыслу точки поворота, в которой  $\tilde{U}(x_1) = \tilde{E}$ . Поэтому в качестве граничного условия в точке поворота следует взять значение первой производной  $\Psi'(x_1)$ . Его легко найти, заметив, что при малых  $\xi = x - x_1 \ll 1$ , уравнение (79) сводится к уравнению Эйри

$$\Psi''(z) + z\Psi = 0 \quad (80)$$

где

$$z = \left( \frac{3}{2} \frac{1}{x_1^3} - \frac{9}{4} \frac{1}{x_1^4} \right)^{1/3} \xi. \quad (81)$$

Общее решение уравнения (80)

$$\Psi(z) = C_1 \text{Ai}(-z) + C_2 \text{Bi}(-z). \quad (82)$$

Должно быть ясно, что если внешняя граница  $x_{\text{out}} \rightarrow \infty$ ,  $\Psi \rightarrow 0$ , и константа в общем решении  $C_2 = 0$ . При конечном  $x_{\text{out}}$  константа  $C_2 \neq 0$  и значение первой производной  $\Psi'(x_1)$  должно находиться из условия на внешней и внутренней границах (30). Ниже мы приводим решения для случая  $x_{\text{out}} \gg 1$  с константой  $C_2 = 0$ .

В точке  $x_1, \xi = z = 0$ , и первая производная равна:

$$\left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x_1} = \left. \frac{d\Psi}{dz} \frac{dz}{dx} \right|_{x_1} = C_1 \text{Ai}'(0) \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{x_1^3} - \frac{9}{4} \frac{1}{x_1^4} \right]^{1/3}, \quad (83)$$

где  $\text{Ai}'(0) = 0.25882\dots$ .

Интегрирование уравнения (79) с граничными условиями (30)  $\Psi'|_{x_{\text{in}}} + \frac{\Psi}{2x_{\text{in}}} = 0$  и (83) для различных значений  $x_{\text{in}}$  дает семейство решений с дискретными (неэквидистантными) «энергетическими уровнями»  $\tilde{E}_n$  (или, что то же самое по (27), с дискретными точками поворота  $x_1$ ), соответствующих целому числу  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  нулей функции  $\Psi$ . Заметим, что для данного  $x_{\text{in}}$  существует различное число возможных энергетических уровней, и существует максимальное значение  $(x_{\text{in}})_{\text{max}} \approx 0.8116$ , допускающее существование единственного уровня при  $n = 0$ . Решения, нормированные на максимальное значение функции  $\Psi$ , показаны на рис. 13. Дискретные «энергетические уровни»  $\tilde{E} = -(k_z r_0)^2$  уравнения (79) для различных внутренних границ  $x_{\text{in}}$  показаны на рис. 14. В таблице 1 приведены значения энергии  $\tilde{E}$  различных уровней при фиксированных  $x_{\text{in}}$  для разных граничных условий на функцию  $\Psi$ . Видно, что тип граничных условий слабо влияет на значение энергии «нижних» уровней в глубоких потенциальных ямах при  $x_{\text{in}} \ll 1$ .

Отметим, что уравнение (79) можно решить в квазиклассическом (ВКБ) приближении, используя условие Бора-Зоммерфельда для дискретных уровней энергии  $E = -k_z^2 < 0$  с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  в потенциале  $U$  для жестких границ [27, 28]:

$$\int_{r_{\text{in}}}^{r_1} \sqrt{E - U} dr = \pi \left( n + \frac{3}{4} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (84)$$

Здесь  $r_1$  – точка поворота в потенциале  $U$ , которую можно найти из уравнения (26). Существование стационарных уровней с отрицательной энергией и  $\omega^2 < 0$  сигнализирует о неустойчивости течения. Аналогичное уравнение, но с другой константой несколько отличной от  $3/4$ , можно получить и для свободной границы. Однако при больших  $n \gg 1$  все три граничные условия ( $\Psi|_{x_{\text{in}}} = 0$ ,  $\Psi'|_{x_{\text{in}}} = 0$ ,  $(\Psi' + \frac{1}{2}\frac{\Psi}{x})|_{x_{\text{in}}} = 0$ ) дают одинаковый результат.

В безразмерных единицах с энергией  $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$  и потенциалом  $\tilde{U}$ , уравнение (84) принимает вид

$$\int_{x_{\text{in}}}^{x_1} \sqrt{\tilde{E} - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{4x^3}} dx = \pi \left( n + \frac{3}{4} \right). \quad (85)$$

В случае большой длины волны возмущений  $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2 \ll 1$ . При малых энергиях  $\tilde{E} \approx 0$ , точка поворота стремится к нулю потенциала,  $r_1 \rightarrow r_0$ , интеграл в уравнении (85) имеет вид

$$\int_{x_{\text{in}}}^1 \sqrt{-\frac{3}{4x^2} + \frac{3}{4x^3}} dx = \pi \left( n + \frac{3}{4} \right). \quad (86)$$

Этот интеграл берется:

$$\sqrt{3} \left[ \sqrt{\frac{1}{x_{\text{in}}} - 1} + \arcsin \sqrt{x_{\text{in}}} - \frac{\pi}{2} \right] = \pi \left( n + \frac{3}{4} \right) \quad (87)$$

(ср. с уравнением (2.24) для случая изомоментного вращения с круговой скоростью  $v_\phi \propto 1/r$  в оригинальной статье Велихова [6]; здесь мы рассматриваем кеплеровский случай с  $v_\phi \propto 1/\sqrt{r}$ ). Из уравнения (87) мы находим первое  $x_{\text{in}}$  для  $n = 0$ :  $x_{\text{in}} \approx 0.575$ . Точное значение, которое мы нашли численно (см. рис. 14), равно  $(x_{\text{in}})_{\text{max}} \approx 0.8116$ . Более того, при заданных граничных условиях третьего рода значение энергии для моды с  $n = 0$   $\tilde{E}[(x_{\text{in}})_{\text{max}}] \approx -0.2644$ , а для мод  $n = 1, 2, \dots$  всегда есть дискретное значение  $x_{\text{in}}$ , при котором  $\tilde{E} = 0$ . Для граничных условий первого и второго рода существует  $E[(x_{\text{in}})_{\text{max}}] = 0$  (см. Таблицу 1 и 2 для различных краевых условий на внутренней границе). Для  $x_{\text{in}} > (x_{\text{in}})_{\text{max}}$  потенциальная яма настолько мелка, что не существует стационарных «энергетических уровней».

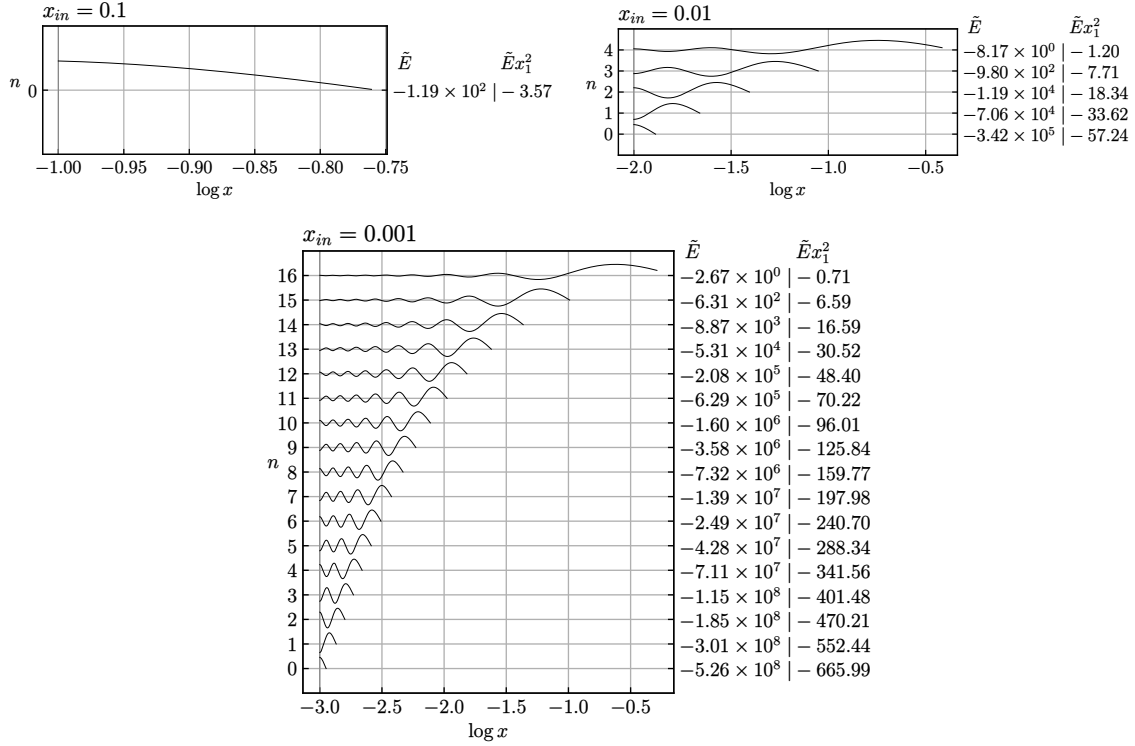


Рис. 13: Нормированные решения уравнения (79)  $\Psi/\Psi_{\max}$  с граничным условием (30)  $\Psi'|_{x_{in}} + \frac{\Psi}{2x_{in}} = 0$  и  $\Psi'(x_1)$  из (83), которое соответствует граничному условию  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 0$ , для  $x_{in} = 10^{-1}, 10^{-2}$  и  $10^{-3}$ . С уменьшением  $x_{in}$  (углублением потенциальной ямы) число стационарных отрицательных энергетических уровней увеличивается. Квазиэкспоненциально затухающая часть решения при  $x > x_1$  не показана.

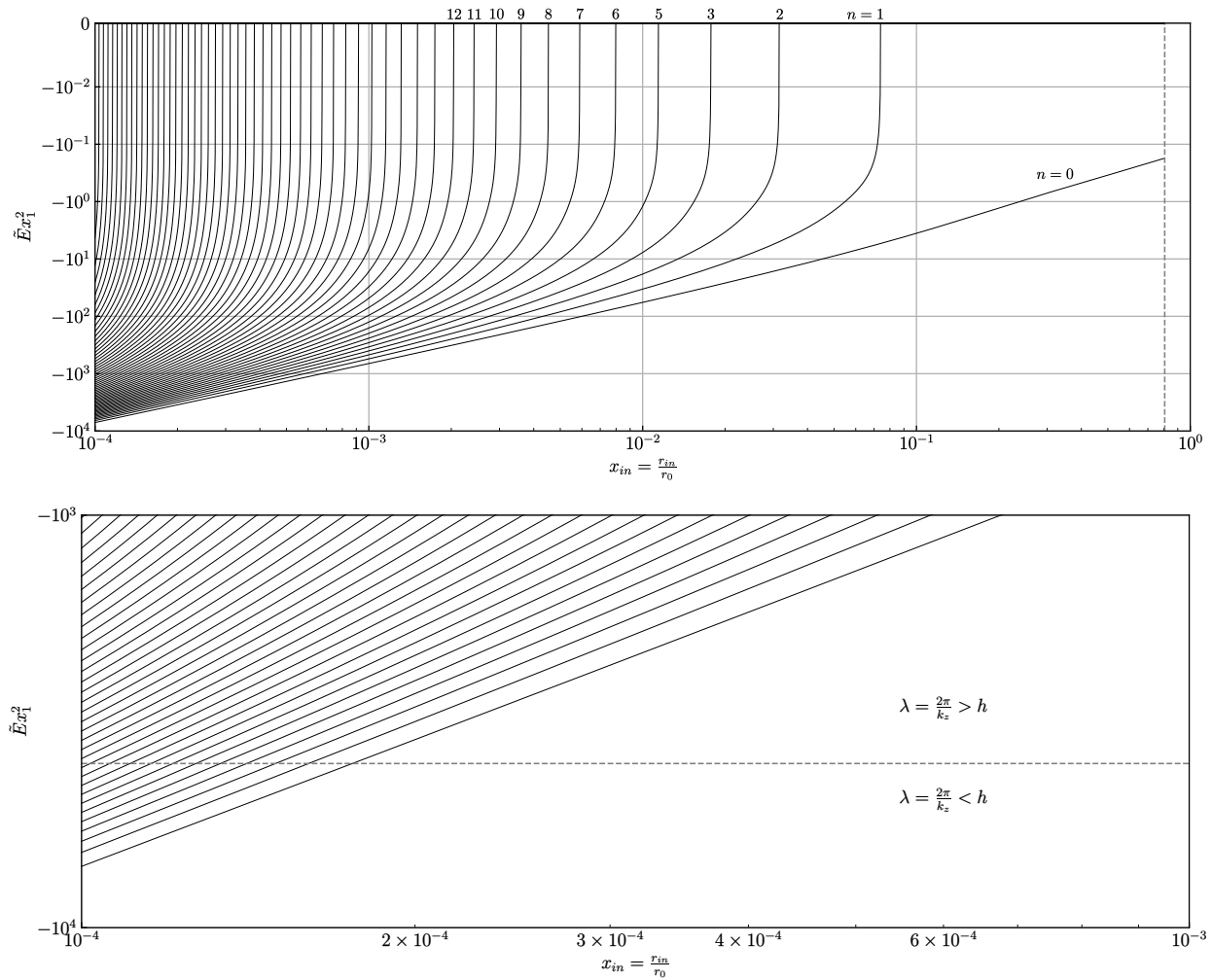


Рис. 14: Дискретные «энергетические уровни»  $\tilde{E} = -(k_z r_0)^2$  уравнения (79) для различных внутренних границ  $x_{in}$  на графике  $\tilde{E}x_1^2 - -\log x_{in}$ . Чем меньше  $x_{in}$ , тем больше число дискретных «энергетических уровней»  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  функции  $\Psi$ . Глубокие «энергетические уровни» с  $-\tilde{E}x_1^2 > 4 \times 10^3$  возникают при  $\log x_{in} < -3.756$ . Существует максимальное значение  $x_{in} \approx 0.8116$  с  $\tilde{E}_0 \approx -0.2644$  для собственной моды с  $n = 0$ . Остальные моды  $n = 1, 2, \dots$  могут иметь  $\tilde{E} = 0$  при определенных значениях  $x_{in}$ . На нижней панели отдельно показана область «глубоких уровней» и граница  $\lambda = 2\pi/k_z > h = 0.1r$  для тонких аккреционных дисков (см. раздел 2.6).

Напомним, что точность ВКБ-аппроксимации возрастает при больших  $n$ . В нашем случае при  $x_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_0 \ll 1$  дискретными значениями  $x_{\text{in}}$  являются:

$$x_{\text{in}} = \frac{1}{\left[ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left( n + \frac{3}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right]^2 + 1}. \quad (88)$$

В принципе, можно численно взять интеграл в (85) для любого значения  $\tilde{E}$ , чтобы найти дискретные уровни энергии  $\tilde{E}_n$  при фиксированных  $x_{\text{in}}$  (особенно при больших  $|\tilde{E}|$ , относящихся к тонким аккреционным дискам, см. выше) для любого  $n$ . Однако выше уже были получены точные численные решения уравнения (79).

Отметим, что при игнорировании члена  $\frac{3}{4} \frac{1}{x^2}$  в уравнении (85) его можно решить аналитически (см. [22]). Решение ВКБ оказалось в отличном согласии с численными результатами.

## В Случай $r_{\text{out}} < r_0$

Если внешняя граница течения  $r_{\text{out}}$  оказывается меньше, чем  $r_0$  (точка, в которой потенциал обращается в ноль,  $U(r_0) = 0$ , см. (23)), то задачу о нахождении стационарных уровней энергии уравнения (79) следует решать численно с граничными условиями (30). В случае узкого течения (когда внешний радиус близок к внутреннему) задача имеет аналитическое решение. Такая задача для другого закона вращения и нулевых граничных условий для возмущений магнитного поля  $b_r = 0$  (соответствующих условию  $\Psi = 0$ ) была решена в работе Е.П.Велихова [6]. Введем обозначения

$$\bar{r} \equiv r_{\text{in}} + \frac{r_{\text{out}} - r_{\text{in}}}{2}, \quad \Delta \equiv r_{\text{out}} - r_{\text{in}} \ll \bar{r} \quad (89)$$

При фиксированном  $\bar{r}$  уравнение (79) превращается в задачу Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями третьего рода на интервале  $x \in [a, b]$ :

$$\begin{cases} \Psi'' + \lambda\Psi = 0, \\ \Psi'|_a + \frac{\Psi}{2a} = 0, \\ \Psi'|_b + \frac{\Psi}{2b} = 0 \end{cases} \quad (90)$$



где

$$\lambda = -k_z^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{GM}{\bar{r}^3} \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2 \right]}{\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (91)$$

Эта задача допускает существование только положительных нетривиальных собственных значений  $\lambda_n > 0$ , которым соответствуют осциллирующие собственные функции  $\Psi_n$ . В этом случае общее решение уравнения (90) есть

$$\Psi = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x). \quad (92)$$

Константы  $C_1, C_2$  находятся из граничных условий. Выбрасывая тривиальное решение  $\lambda = 0$ , получаем

$$\begin{cases} C_1 \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda a}} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}a) \right) + C_2 \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda a}} - \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}a) \right) = 0 \\ C_1 \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda b}} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}b) \right) + C_2 \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda b}} - \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}b) \right) = 0 \end{cases} \quad (93)$$

Система (93) имеет нетривиальное решение при равенстве нулю детерминанта, откуда получаем трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений  $\lambda$ :

$$\left[ \frac{1}{2\sqrt{\lambda b}} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda a}} \right] \left( 1 + \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}a) \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}b) \right) + \left[ 1 + \frac{1}{4\lambda ab} \right] \left( \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}a) - \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}b) \right) = 0. \quad (94)$$

Уравнение (94) имеет два семейства решений:

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}a) \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}b) = 0 \\ -\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}(b-a)) = \frac{\sqrt{\lambda}(b-a)}{1+4\lambda ab} \end{cases} \quad (95)$$

Первое семейство решений уравнения (94) есть

$$\cos \sqrt{\lambda}(a-b) = 0. \quad (96)$$

откуда получаем набор собственных значений

$$\lambda_n = \frac{\left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2}{\Delta^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (97)$$

При малых  $n = 1, 2, 3, \dots$  второе семейство решений (95) может найтись численно, однако при больших значениях аргумента быстро сходится к  $\lambda_n \approx \pi^2 n^2 / \Delta^2$ ,  $n \gg 1$ . Поэтому при больших  $n$  оба решения можно объединить в одно:  $\lambda_n \approx (\pi^2/4)(1+n)^2/\Delta^2$ . Отметим, что при однородных граничных условиях первого рода  $\Psi|_{a,b} = 0$  или второго рода  $\Psi'|_{a,b} = 0$  получаются решения

$$\sin \sqrt{\lambda}(b-a) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2}, \quad \sin \sqrt{\lambda}(a+b) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{(a+b)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (98)$$

соответственно.

Из (97) следует набор уравнений для каждого собственного значения  $\lambda_n$ :

$$-k_z^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{GM}{\bar{r}^3} \frac{\left[ \frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2 \right]}{\left( c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2} = \lambda_n \approx \frac{\pi^2 (n+1)^2}{4\Delta^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (99)$$

Отсюда получаем дисперсионные уравнения в виде

$$\frac{\omega^2}{c_a^2 k_z^2} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(3K-1)}{(K+2)^2}} \right] \quad (100)$$

$$K \approx \left( \frac{v_\phi^2(\bar{r})}{c_a^2} \right) \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}(n+1)^2 \left( \frac{\bar{r}}{\Delta} \right)^2 + k_z^2 \bar{r}^2 + \frac{3}{4}}$$

Для неустойчивых мод  $\omega^2 < 0$  в дисперсионном уравнении (100) оставляем знак минус перед квадратным корнем и требуем  $K > 1/3$ , что приводит к появлению критического магнитного поля для МРН-мод:

$$c_a^2 < [c_a^2]_{cr} \approx \frac{4v_\phi^2(\bar{r})}{\frac{1}{3}\pi^2(n+1)^2 \left( \frac{\bar{r}}{\Delta} \right)^2 + \frac{4}{3}k_z^2 \bar{r}^2 + 1}. \quad (101)$$

Заметим, что для граничных условий первого и второго рода значения критического поля будут

$$\left\{ \begin{array}{l} [c_a^2]_{cr} = \frac{4v_\phi^2(\bar{r})}{\frac{4}{3}\pi^2 n^2 \left( \frac{\bar{r}}{\Delta} \right)^2 + \frac{4}{3}k_z^2 \bar{r}^2 + 1}, \quad \Psi|_{a,b} = 0 \\ [c_a^2]_{cr} = \frac{4v_\phi^2(\bar{r})}{\frac{1}{3}\pi^2 n^2 + \frac{4}{3}k_z^2 \bar{r}^2 + 1}, \quad \Psi'|_{a,b} = 0 \end{array} \right. \quad (102)$$

Обращает внимание схожесть результатов в случае граничных условий первого и третьего рода.

Отметим в заключение, что в случае  $r_{\text{out}} < r_0$  (когда потенциал имеет один знак на всем исследуемом интервале  $[r_{\text{in}}, r_{\text{out}}]$ ) асимптотика собственных значений  $\lambda_n \sim \pi^2 n^2 / (r_{\text{out}} - r_{\text{in}})^2$  при больших  $n \gg 1$  следует из общих теорем задачи Штурма-Лиувилля для любого непрерывного знакопостоянного потенциала (см., например, Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Операторы Штурма - Лиувилля и Дирака. Москва : Наука, 1988).

# On the appearance of non-local MRI in Keplerian accretion discs

N. I. Shakura<sup>1</sup> K. A. Postnov<sup>1,2</sup>, D. A. Kolesnikov<sup>1</sup>, G. V. Lipunova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Kazan Federal University, Kazan, Russia

We revisit the modal analysis of small perturbations in Keplerian ideal gas flows with constant vertical magnetic field leading to magneto-rotational instability (MRI) using the non-local approach. In the general case, MRI modes are described by a Schrödinger-like differential equation with some effective potential including 'repulsive' ( $1/r^2$ ) and 'attractive' ( $-1/r^3$ ) terms and are quantized. In shallow potentials, there are no stationary 'energy levels'. In thin Keplerian accretion discs, the perturbation wavelengths  $\lambda = 2\pi/k_z$  are smaller than the disc semi-thickness  $h$  only in 'deep' potential wells. We find that there is a critical magnetic field for the MRI to develop. The instability arises for magnetic field below this critical value. In thin accretion discs, at low background Alfvén velocity  $c_A \ll (c_A)_{cr}$  the MRI instability increment  $\omega$  is suppressed compared to the value obtained in the local perturbation analysis,  $\omega \approx -\sqrt{3}ic_A k_z$ . We also investigate for the first time the case of radially variable background magnetic field.

Key words: accretion discs, magnetorotational instability

Таблица 1: Примеры уровней энергии  $\tilde{E}$  уравнения (79) при  $x_{\text{in}} = 0.1, 0.01, 0.001$  и разных граничных условиях на внутренней границе  $x_{\text{in}}$ .

$n_{\tilde{E}}$	$(\Psi' + \frac{\Psi}{2x}) _{x_{\text{in}}} = 0$	$\Psi' _{x_{\text{in}}} = 0$	$\Psi _{x_{\text{in}}} = 0$
$x_{\text{in}} = 0.1$			
0	-118.86	-86.44	-
$x_{\text{in}} = 0.01$			
4	-8.168	-7.096	-
3	$-9.799 \times 10^2$	$-9.250 \times 10^2$	$-1.229 \times 10^2$
2	$-1.189 \times 10^4$	$-1.145 \times 10^4$	$-3.483 \times 10^3$
1	$-7.057 \times 10^4$	$-6.846 \times 10^4$	$-2.808 \times 10^4$
0	$-3.423 \times 10^5$	$-3.288 \times 10^5$	$-1.408 \times 10^5$
$x_{\text{in}} = 0.001$			
16	-2.666	-2.525	-
15	$-6.314 \times 10^2$	$-6.190 \times 10^2$	$-7.436 \times 10^1$
14	$-8.869 \times 10^3$	$-8.762 \times 10^3$	$-2.668 \times 10^3$
13	$-5.308 \times 10^4$	$-5.260 \times 10^4$	$-2.266 \times 10^4$
12	$-2.078 \times 10^5$	$-2.063 \times 10^5$	$-1.071 \times 10^5$
11	$-6.287 \times 10^5$	$-6.250 \times 10^5$	$-3.650 \times 10^5$
10	$-1.598 \times 10^6$	$-1.590 \times 10^6$	$-1.007 \times 10^6$
9	$-3.585 \times 10^6$	$-3.569 \times 10^6$	$-2.397 \times 10^6$
8	$-7.319 \times 10^6$	$-7.290 \times 10^6$	$-5.121 \times 10^6$
7	$-1.390 \times 10^7$	$-1.385 \times 10^7$	$-1.007 \times 10^7$
6	$-2.495 \times 10^7$	$-2.486 \times 10^7$	$-1.857 \times 10^7$
5	$-4.284 \times 10^7$	$-4.271 \times 10^7$	$-3.258 \times 10^7$
4	$-7.115 \times 10^7$	$-7.094 \times 10^7$	$-5.496 \times 10^7$
3	$-1.155 \times 10^8$	$-1.151 \times 10^8$	$-9.011 \times 10^7$
2	$-1.854 \times 10^8$	$-1.848 \times 10^8$	$-1.451 \times 10^8$
1	$-3.005 \times 10^8$	$-2.994 \times 10^8$	$-2.328 \times 10^8$
0	$-5.263 \times 10^8$	$-5.227 \times 10^8$	$-3.828 \times 10^8$

Таблица 2: Значения безразмерной внутренней границы течения для нулевой энергии  $\tilde{E} = 0$ :  $x_{in}|_{\tilde{E}=0}$  при различном выборе краевых условий. Значение  $x_{in}|_{\tilde{E}=0}$  в ВКБ-приближении дается выражениями (87) и (88). Отметим, что при краевом условии третьего рода (свободная граница) нулевой уровень достигается при конечном значении  $\tilde{E} \approx -0.2644$  при  $x_{in} \approx 0.8116$ . См. также график на Рис. 14.

$n_{\tilde{E}}$	$(\Psi' + \frac{\Psi}{2x}) _{x_{in}} = 0$	$\Psi' _{x_{in}} = 0$	$\Psi _{x_{in}} = 0$
...	...	...	...
$x_{in} = 0.001$			
16	$1.02496 \times 10^{-3}$	$1.02426 \times 10^{-3}$	—
15	$1.15546 \times 10^{-3}$	$1.15457 \times 10^{-3}$	$1.08531 \times 10^{-3}$
14	$1.31260 \times 10^{-3}$	$1.31145 \times 10^{-3}$	$1.22775 \times 10^{-3}$
13	$1.50417 \times 10^{-3}$	$1.50266 \times 10^{-3}$	$1.40021 \times 10^{-3}$
12	$1.74105 \times 10^{-3}$	$1.73903 \times 10^{-3}$	$1.61176 \times 10^{-3}$
11	$2.03875 \times 10^{-3}$	$2.03598 \times 10^{-3}$	$1.87519 \times 10^{-3}$
10	$2.42010 \times 10^{-3}$	$2.41620 \times 10^{-3}$	$2.20897 \times 10^{-3}$
9	$2.91976 \times 10^{-3}$	$2.91407 \times 10^{-3}$	$2.64061 \times 10^{-3}$
8	$3.59244 \times 10^{-3}$	$3.58384 \times 10^{-3}$	$3.21255 \times 10^{-3}$
7	$4.52880 \times 10^{-3}$	$4.51513 \times 10^{-3}$	$3.99300 \times 10^{-3}$
6	$5.88807 \times 10^{-3}$	$5.86497 \times 10^{-3}$	$5.09744 \times 10^{-3}$
5	$7.97202 \times 10^{-3}$	$7.92969 \times 10^{-3}$	$6.73423 \times 10^{-3}$
4	$1.14131 \times 10^{-2}$	$1.13263 \times 10^{-2}$	$9.31161 \times 10^{-3}$
3	$1.77392 \times 10^{-2}$	$1.75298 \times 10^{-2}$	$1.37231 \times 10^{-2}$
2	$3.15576 \times 10^{-2}$	$3.08961 \times 10^{-2}$	$2.22593 \times 10^{-2}$
1	$7.39693 \times 10^{-2}$	$7.03546 \times 10^{-2}$	$4.24509 \times 10^{-2}$
0	$0.8116 _{\tilde{E}=-0.2644}$	$5.87626 \times 10^{-1}$	$1.14244 \times 10^{-1}$