

Магниторотационная неустойчивость в кеплеровских дисках: нелокальный подход

Н. И. Шакура¹, К. А. Постнов^{1,2},
Д. А. Колесников¹, Г. В. Липунова¹

¹ГАИШ МГУ

²КФУ

5 декабря 2022 г.

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Введение | 2 |
| 2 | Нелокальный модальный анализ | 4 |
| 2.1 | Основные уравнения | 4 |
| 2.2 | Случай несжимаемой жидкости постоянной плотности . . . | 5 |
| 2.3 | Дифференциальное уравнение для малых возмущений . . . | 7 |
| 2.4 | Вывод дисперсионного уравнения и критической альфвеновской скорости | 9 |
| 2.5 | Применение к тонким аккреционным дискам | 13 |
| 2.6 | Как создать однородное магнитное поле в тонком диске? . . | 15 |
| 3 | Магниторотационная неустойчивость с альфвеновской скоростью, зависящей от радиуса | 16 |
| 3.1 | Случай постоянного фонового магнитного поля | 16 |
| 3.2 | Случай с радиально зависимым фоновым магнитным полем | 18 |
| 4 | Итоги и обсуждение | 26 |

Аннотация

В рамках нелокального подхода пересмотрен модальный анализ малых возмущений кеплеровского течения идеального газа, приводящих к магниторотационной неустойчивости, как в постоянном вертикальном магнитном поле, так и в случае радиально изменяющейся фоновой альфвеновской скорости. Моды магниторотационных возмущений описываются дифференциальным уравнением типа уравнения Шрёдингера с некоторым эффективным потенциалом, включающим в простом случае, когда альфвеновская скорость постоянна по радиусу, «отталкивающий» ($1/r^2$) и «притягивающий» ($-1/r^3$) члены. Учет радиальной зависимости фоновой альфвеновской скорости приводит к качественному изменению формы эффективного потенциала. Показано, что в «неглубоких» потенциалах нет стационарных уровней энергии, соответствующих неустойчивым модам $\omega^2 < 0$. В тонких аккреционных дисках, длина волны возмущения $\lambda = 2\pi/k_z$ меньше полутолщины h диска только в «глубоких» потенциалах. Найдена предельная величина фоновой альфвеновской скорости $(c_A)_{cr}$, выше которой магниторотационная неустойчивость не возникает. В тонких аккреционных дисках при малой фоновой альфвеновской скорости $c_A \ll (c_A)_{cr}$ инкремент магниторотационной неустойчивости ω подавлен по сравнению со значением, получаемым в локальном анализе возмущений, $\omega \approx -\sqrt{3} i c_A k_z$.

Ключевые слова: аккреционные диски, ...

1 Введение

Сдвиговые течения вблизи астрофизических объектов, характеризуемые неоднородным полем скоростей, являются универсальным источником и агентом переноса энергии и тесно связаны с явлениями турбулентности, генерации магнитных полей, ускорения частиц.

Устойчивость сдвиговых гидродинамических течений относительно малых возмущений в магнитном поле впервые была рассмотрена в работах Е.П. Велихова [1] и С. Чандрасекара [2]. В отсутствии магнитного поля гидродинамическая неустойчивость во вращающемся сдвиговом потоке появляется в случае, когда момент импульса убывает наружу от оси вращения [3, 4].

Е.П. Велихов и С. Чандрасекар показали, что в пронизанном вертикальным магнитным полем, осесимметричном, дифференциально вращающемся потоке с угловой скоростью, убывающей наружу (то есть с моментом импульса, возрастающим с расстоянием от оси вращения) возможна магнито-ротационная неустойчивость (МРН)¹.

Теория МРН была применена к астрофизическим аккреционным дискам в важной работе [6], и с тех пор считается, что эта неустойчивость порождает турбулентность в аккреционных дисках (см. обзор [7]). Нелинейное численное моделирование (например, [8, 9, 10]) подтверждает, что МРН действительно может поддерживать турбулентность в аккреционных дисках.

В данной работе мы проводим нелокальный линейный анализ МРН в кеплеровских аккреционных дисках с угловой скоростью $\Omega^2(r) \propto 1/r^3$. Для течений с постоянным моментом импульса по радиусу, $\Omega(r)r^2 = const$, такая проблема была впервые рассмотрена Е.П. Велиховым [1] для длинноволновых возмущений в направлении, перпендикулярном плоскости основного течения. Нелокальный анализ показывает, что в кеплеровских потоках дисперсионное уравнение для моды $\omega(k)$ содержит член, зависящий от радиуса ($\propto -1/r^2$), которым обычно пренебрегают в локальном модальном анализе. Глобальный модальный анализ МРН в сдвиговых потоках проводился в работах [11, 12]. В глобальном анализе появляется критическое магнитное поле, которое стабилизирует МРН [13, 11, 12].

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы проводим линейный модальный анализ для малых возмущений в идеальной жидкости в виде $\propto f(r) \exp[i(\omega t - k_z z)]$. Мы выводим дисперсионное уравнение, которое может быть сведено к уравнению типа Шрёдингера с энергией $E = -k_z^2$ и потенциалом $U(r)$, который имеет два члена: «притягивающий», $\propto -1/r^3$ и «отталкивающий», $\propto 1/r^2$. В отличие от локального анализа, эффективный потенциал обращается в ноль в точке r_0 , зависящей от частоты моды ω , волнового числа k_z и фоновой альфвеновской скорости. В разделе 2.4, мы выводим алгебраическое дисперсионное уравнение $\omega(k_z)$ и значение критической альфвеновской скорости, ниже которого появляется МРН. В разделе

¹Мы рассматриваем случай только вертикального фонового магнитного поля. Осесимметричные газовые течения с тороидальным фоновым магнитным полем при наличии силы тяжести подвержены неустойчивости Паркера [5].

3.2 мы впервые рассматриваем МРН на фоне радиально меняющегося вертикального магнитного поля и показываем, что в этом случае эффективный потенциал может нетривиально изменяться. В разделе 4, мы сравниваем наши результаты со стандартными результатами, полученными в локальном модальном анализе. В Приложении А мы численно решаем уравнение Шрёдингера для нелокальных возмущений для случая постоянной фоновой альфвеновской скорости.

2 Нелокальный модальный анализ

2.1 Основные уравнения

Рассмотрим дифференциально вращающуюся идеальную жидкость в однородном вертикальном магнитном поле. Классические результаты были получены в работах Е.П. Велихова и С. Чандрасекара, которые изучали устойчивость сдвиговых гидродинамических магнитных потоков [1, 2].

Запишем уравнения движения идеальной МГД-жидкости.

1) Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0; \quad (1)$$

2) Уравнение Эйлера, включающее силу тяжести и силу Лоренца,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi_g + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

(здесь ϕ_g – ньютоновский гравитационный потенциал²);

3) Уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3)$$

Рассмотрим адиабатические возмущения с постоянной энтропией

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s = 0. \quad (4)$$

²В принципе, можно решать задачу в шварцшильдовской метрике используя потенциал $\phi = \frac{c^2}{2} \ln(1 - \frac{r_g}{r})$, $r_g = 2GM/c^2$ см. [14].

Для таких возмущений вариации возмущённой плотности равны нулю, $\rho_1 = 0$, и вариации давления в уравнении энергии исчезают, $p_1 = 0$ (в предположении уравнения состояния идеального газа, см., напр., Appendix A в [15]).

Мы исследуем случай чисто кеплеровского вращения в цилиндрической системе координат, при котором компоненты невозмущённой скорости $v_\phi \equiv u_{\phi,0} = \sqrt{GM/r}$, $u_{r,0} = u_{z,0} = 0$. Мы предполагаем, что силы, обусловленные градиентом давления, малы и появляются только в возмущённых уравнениях.

2.2 Случай несжимаемой жидкости постоянной плотности

Рассмотрим малые возмущения в среде и запишем с их учетом компоненты скорости u_r , $u_{\phi,0} + u_\phi$, u_z , магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ и давление $p_0 + p_1$. Пусть поле \mathbf{B}_0 — полоидальное. Выбираем возмущения в нелокальной форме вдоль радиальной координаты $f(r) \exp[i(\omega t - k_z z)]$.

Для таких возмущений уравнение неразрывности $\text{div } \mathbf{u} = 0$ в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) - i k_z u_z = 0 \quad (5)$$

(Отметим, что первый член в уравнении неразрывности записан в дифференциальной форме, который в локальном приближении, т.е. для возмущений $\propto \exp[i(\omega t - k_r r - k_z z)]$, упрощается до $-i k_r u_r$.)

Радиальная, азимутальная и вертикальная компоненты уравнения Эйлера, соответственно, записываются в виде:

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{c_A^2}{B_0} \left[\frac{\partial b_z}{\partial r} + i k_z b_r \right], \quad (6)$$

$$i\omega u_\phi + \frac{\varkappa^2}{2\Omega} u_r = -i \frac{c_A^2}{B_0} k_z b_\phi \quad (7)$$

(здесь мы ввели эпициклическую частоту $\varkappa^2 = 4\Omega^2 + r \frac{d\Omega^2}{dr} \equiv \frac{1}{r^3} \frac{d\Omega^2 r^4}{dr}$ и невозмущённую альфвеновскую скорость $c_A^2 = B_0^2 / (4\pi \rho_0)$),

$$i\omega u_z = ik_z \frac{p_1}{\rho_0}. \quad (8)$$

Три компоненты уравнения индукции записываются в виде:

$$i\omega b_r = -iB_0 k_z u_r, \quad (9)$$

$$i\omega b_\phi = -iB_0 k_z u_\phi + r \frac{d\Omega}{dr} b_r, \quad (10)$$

$$i\omega b_z = -B_0 \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r}. \quad (11)$$

Выразим все возмущения через радиальные возмущения магнитного поля b_r . Используя уравнения (8), (5) и (9), находим

$$\frac{p_1}{\rho_0} = \frac{\omega u_z}{k_z} = i \frac{\omega^2}{B_0 k_z^3} \frac{1}{r} \frac{\partial r b_r}{\partial r}. \quad (12)$$

Из уравнения (9) находим

$$u_r = -\frac{\omega}{B_0 k_z} b_r. \quad (13)$$

Подставляя уравнение (13) в (11), получаем:

$$b_z = -\frac{i}{k_z r} \frac{\partial r b_r}{\partial r}. \quad (14)$$

(Заметим, что это уравнение отражает соленоидальность магнитного поля, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, которая использовалась при записи компонент линеаризованного уравнения индукции выше.) Подставляя (13), (10) и (14) в (7), получаем:

$$(c_A^2 k_z^2 - \omega^2) u_\phi = i \left[\frac{\omega^2 \varkappa^2}{2\Omega B_0 k_z} - \frac{c_A^2 k_z}{B_0} r \frac{d\Omega}{dr} \right] b_r. \quad (15)$$

Наконец, используя уравнения (12) – (15), из уравнения (6) мы получаем дифференциальное уравнения второго порядка для b_r :

$$\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 b_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b_r}{r} \right) - b_r k_z^2 \right] + 2\Omega \left(\frac{\omega^2 \varkappa^2}{k_z^2 2\Omega} - c_A^2 r \frac{d\Omega}{dr} \right) b_r = 0. \quad (16)$$

2.3 Дифференциальное уравнение для малых возмущений

Следуя [1] и [2], легко показать, что в уравнении (16) ω^2 должна быть действительным числом для широкого диапазона граничных условий, т.е. допускаются только осцилляции ($\omega^2 > 0$) или экспоненциальный рост или затухание ($\omega^2 < 0$) возмущений. Удобно исключить первую производную из (16) с помощью подстановки $\Psi = b_r \sqrt{r}$, чтобы получить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left\{ -k_z^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{2\Omega \left[\frac{\omega^2}{k_z^2} \varkappa^2 - c_A^2 r \frac{d\Omega^2}{dr} \right]}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2} \right\} \Psi = 0. \quad (17)$$

Это уравнение типа Шрёдингера с энергией $E = -k_z^2$ и потенциалом

$$U = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2} \varkappa^2 - c_A^2 r \frac{d\Omega^2}{dr} \right]}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (18)$$

Как известно из квантовой механики [16], если потенциальная энергия U отрицательна, это уравнение допускает стационарные энергетические уровни с отрицательной энергией E . Существование стационарных уровней при $\omega^2 < 0$ означает неустойчивость потока. Таким образом, вид потенциала U задает область в потоке и интервал значений \mathbf{B} , допускающих развитие МРН.

Отметим интересные для нашей задачи свойства потенциала U . Для кеплеровского закона с $\Omega^2 = GM/r^3$ и $\varkappa^2 = \Omega^2$ потенциал принимает вид:

$$U = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2 \right]}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (19)$$

Для неустойчивых режимов ($\omega^2 < 0$) числитель в уравнении (19) положителен только для возмущений с $\omega^2 > -3c_A^2 k_z^2$. В противном случае потенциал

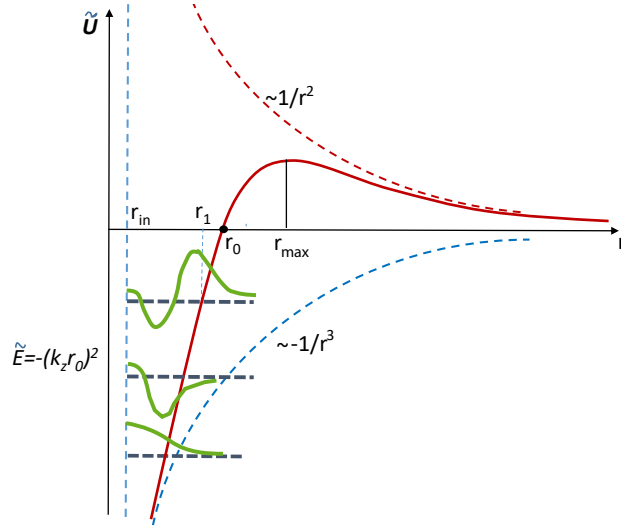


Рис. 1: Схема эффективного потенциала \tilde{U} с характерными точками r_{in} , r_1 , r_0 и r_{max} . Показаны первые три энергетических уровня ($n = 0, 1, 2$) и соответствующие возмущения (зеленым цветом).

чисто положительный, и не существует устойчивых состояний с отрицательной энергией. Для $\omega^2 < 0$ знаменатель в (19) не обращается в ноль. В нашей задаче (см. рис. 1) есть несколько характерных точек: внутренний радиус диска r_{in} , точка поворота r_1 для данной отрицательной энергии $E = -k_z^2$, нулевая точка потенциала r_0 , такие, что $r_{\text{in}} \leq r_1 \leq r_0$, и $r_{\text{max}} = (3/2)r_0$, где потенциал максимален.

Потенциал обращается в ноль в точке

$$r_0 = \frac{4}{3}GM \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2 \right]}{\left(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2} = \frac{4}{3} \frac{GM}{c_A^2} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2}. \quad (20)$$

(Мы будем считать, что эта точка лежит внутри течения).

Удобно ввести безразмерную переменную $x = r/r_0$. Тогда безразмерный потенциал можно записать в виде

$$\tilde{U} = U r_0^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^3}. \quad (21)$$

Безразмерная энергия в уравнении Шрёдингера (17) равна $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$.

Точка поворота потенциала U находится из уравнения

$$-k_z^2 - U(r_1) = 0. \quad (22)$$

(см. Рис. 1). За радиусом r_1 возмущения квазиэкспоненциально затухают. В безразмерных единицах точка поворота $x_1 = r_1/r_0$ в потенциале \tilde{U} находится из уравнения:

$$4\tilde{E}x_1^3 - 3x_1 + 3 = 0, \quad x_1 \leq 1. \quad (23)$$

При отрицательной энергии \tilde{E} это кубическое уравнение имеет один вещественный корень $x_1 = r_1/r_0 < 1$:

$$x_1 = \left(\frac{3}{-8\tilde{E}}\right)^{1/3} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{9\tilde{E}}}\right)^{1/3} + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{9\tilde{E}}}\right)^{1/3} \right]. \quad (24)$$

$$x_1' = \left(\frac{3}{-8\tilde{E}}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{9\tilde{E}}}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{-9\tilde{E}}\right)^{1/3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{9\tilde{E}}}\right)^{-1/3} \right].$$

Точные численные решения уравнения (17) можно найти в Приложении А. Отметим, что глобальный нелокальный анализ магниторотационной неустойчивости, приводящий к уравнению, имеющему вид одномерного уравнения Шрёдингера ((17)), был исследован в [17, 11] в приближении малых альфвеновских скоростей.

2.4 Вывод дисперсионного уравнения и критической альфвеновской скорости

В безразмерных единицах, нормированных на r_0 , уравнение (20) для r_0 превращается в биквадратное уравнение для безразмерной величины $\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}$:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} - 3 = 0. \quad (25)$$

Его решение:

$$\omega^2 = c_A^2 k_z^2 \left(1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12 \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)} \right)^2}}{\frac{3}{2} \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)} \right)^2} \right). \quad (26)$$

Критическое магнитное поле, соответствующее нейтральной моде $\omega^2 = 0$, имеет вид

$$\left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)} \right)_{\text{cr}}^2 = 4, \quad (27)$$

то есть

$$(c_A)_{\text{cr}}^2 = \frac{4GM}{r_0} = \frac{6GM}{r_{\text{max}}}. \quad (28)$$

Таким образом, в достаточно сильном магнитном поле сдвиговой поток стабилизируется силой Лоренца ($\omega^2 = 0$), как это было впервые отмечено в [1] для случая течения в узком зазоре между двумя проводящими цилиндрами.

Используя уравнение (27), перепишем уравнение (26) в виде:

$$\frac{\omega^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} = \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left(1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2}}{6 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2} \right). \quad (29)$$

Ниже рассматриваются только неустойчивые режимы, при $\omega^2 < 0$, соответствующие знаку минус в уравнении (29). При малых $\left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \ll 1$ уравнение (29) превращается в

$$\frac{\omega^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} \approx \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left(-3 + \frac{1}{4} \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \right). \quad (30)$$

$$\frac{\omega^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} \approx \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left(-3 + 48 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \right).$$

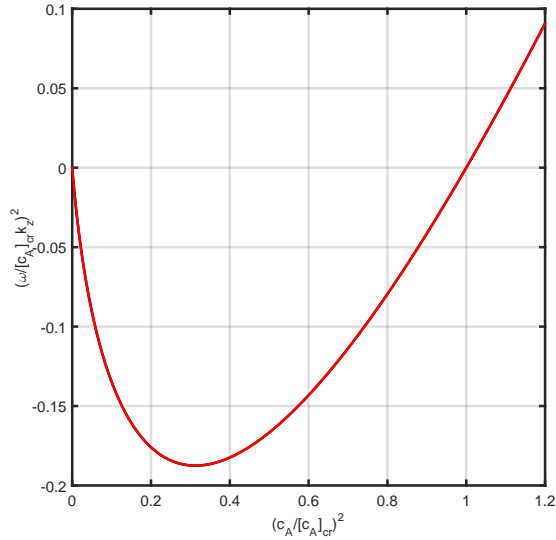


Рис. 2: Решение дисперсионного уравнения (29) со знаком минус перед квадратным корнем для неустойчивых мод $\omega^2 < 0$.

т.е. $\omega^2 \rightarrow 0$ при $c_A^2 \rightarrow 0$. Таким образом, такое поведение ω^2 отличается от результата локального анализа, в котором МРН возникает и при произвольно малом (но ненулевом!) фоновом магнитном поле (см., например, [15]). Очевидно, что существует максимальная скорость роста МРН и соответствующая ей альфвеновская скорость (см. Рис. 2)

$$\left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)_{\text{max}}^2 = \frac{5}{16}, \quad \frac{\omega_{\text{max}}^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} = -\frac{3}{16}. \quad (31)$$

Нормируя на кеплеровскую частоту на радиусе r_0 , $\Omega^2(r_0) = v_\phi^2(r_0)/r_0^2$, получаем **из** (26)

$$\left(\frac{\omega}{\Omega(r_0)} \right)^2 = \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)} \right)^2 (k_z r_0)^2 \left(1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 12 \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)} \right)^2}}{\frac{3}{2} \left(\frac{c_A}{v_\phi(r_0)} \right)^2} \right). \quad (32)$$

Нормируя альфвеновскую скорость в уравнении (32) на **её** критическое

значение (28), получаем:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega(r_0)}\right)^2 = \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2 4(k_z r_0)^2 \left(1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 48 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2}}{6 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2}\right). \quad (33)$$

Заметив, что $\tilde{E} = -(k_z r_0)^2$, используя уравнение (23), получаем $\tilde{E} = -\frac{3(1-x_1)}{4x_1^3}$, и, нормируя на $\Omega^2(r_1)$, находим

$$\left(\frac{\omega}{\Omega(r_1)}\right)^2 = 3(1-x_1) \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2 \left(1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 48 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2}}{6 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2}\right). \quad (34)$$

(Подчеркнем, что фактор $1/x_1^3$ исчез при переходе от **кеплеровской скорости на радиусе r_0 к скорости на r_1** , выше которого возмущения квазиэкспоненциально затухают). В астрофизически **интересном** пределе коротковолновых возмущений, соответствующих большому $|\tilde{E}|$, $x_1 \ll 1$ (из (24)) и, таким образом,

$$\left(\frac{\omega}{\Omega(r_1)}\right)^2 \approx 3 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2 \left(1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 48 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2}}{6 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2}\right). \quad (35)$$

Подставляя уравнение (31) в (35), получаем максимальную скорость роста МРН в случае $x_1 \ll 1$:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega(r_1)}\right)_{\text{max}}^2 \approx -\frac{9}{16}. \quad (36)$$

При малых магнитных полях $(c_a/(c_A)_{\text{cr}})^2 \ll 1$ дисперсионное уравнение для неустойчивых мод превращается в

$$\left(\frac{\omega}{\Omega(r_1)}\right)^2 \approx -9 \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}}\right)^2. \quad (37)$$

2.5 Применение к тонким аккреционным дискам

В аккреционных дисках длина возмущений по вертикальной координате $\lambda = 2\pi/k_z$ должна быть меньше h . Это условие ограничивает допустимые «энергетические уровни». Действительно, в точке поворота x_1 мы имеем

$$\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2 = -4\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 \frac{1}{x_1^2}. \quad (38)$$

Поэтому требование

$$\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 = -\frac{4\pi^2}{x_1^2 \tilde{E}} \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 < 1 \quad (39)$$

дает допустимые уровни энергии, удовлетворяющие следующим условиям

$$x_1^2 |\tilde{E}| > \frac{4\pi^2}{(h/r_1)^2}. \quad (40)$$

Для типичного значения **относительной толщины геометрически тонкого диска** $h/r \lesssim 0.1$ в тонких аккреционных дисках это дает $x_1^2 |\tilde{E}| > 4 \times 10^3$. Помня, что для больших $|\tilde{E}| \gg 1$, $x_1 \approx \left(\frac{3}{4|\tilde{E}|}\right)^{1/3}$ (см. уравнение (24)), соответствующие уровни энергии должны иметь $|\tilde{E}| > 7 \times 10^{10}$. Такие уровни возможны только для очень малых $x_{\text{in}} \ll 1$ (см. Приложение А, рис. (12)).

Наибольшее магнитное поле, допускающее возникновение МРН на радиусе r_1 , равно

$$(c_A)_{\text{cr}}^2 = \frac{4GM}{r_0} = x_1 \frac{4GM}{r_1} = 4x_1 v_\phi^2(r_1). \quad (41)$$

При больших значениях $|\tilde{E}|$, используя условие (40) для тонких дисков, мы находим критическое поле

$$\frac{(c_A)_{\text{cr}}}{v_\phi(r_1)} \lesssim \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{h}{r_1}\right). \quad (42)$$

Поэтому в любой точке потока $r \geq r_{\text{in}}$ мы можем рассматривать поведение глобальных режимов МРН, принимая внутренний радиус течения

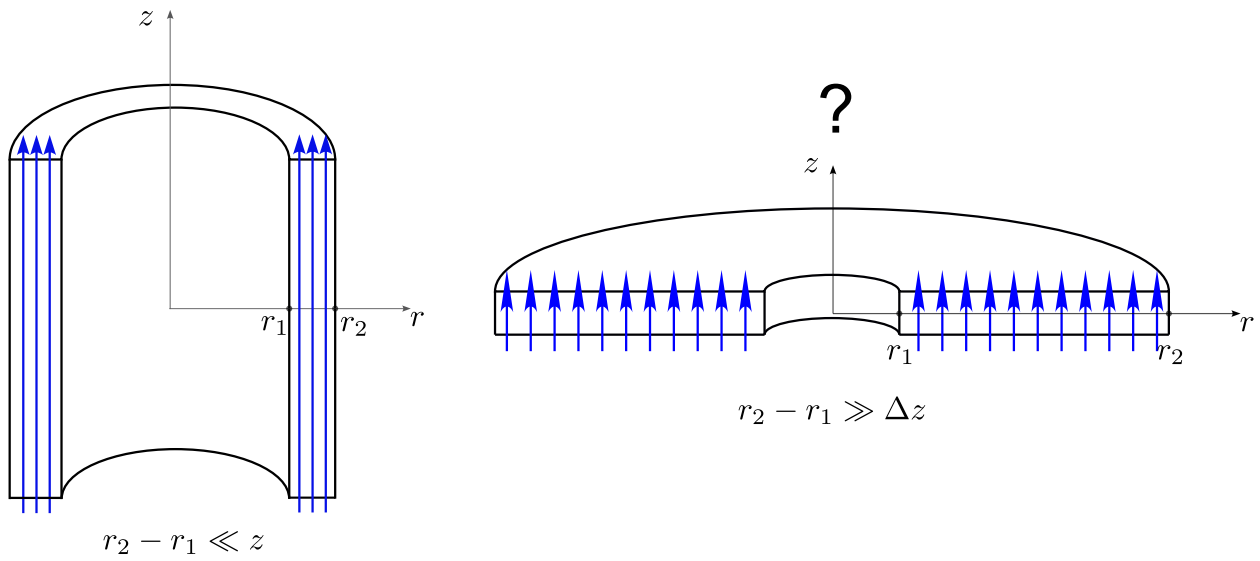


Рис. 3: Слева: течение в однородном магнитном поле в узком зазоре между двумя цилиндрами. Справа: тонкий протяженный аккреционный диск в однородном вертикальном магнитном поле.

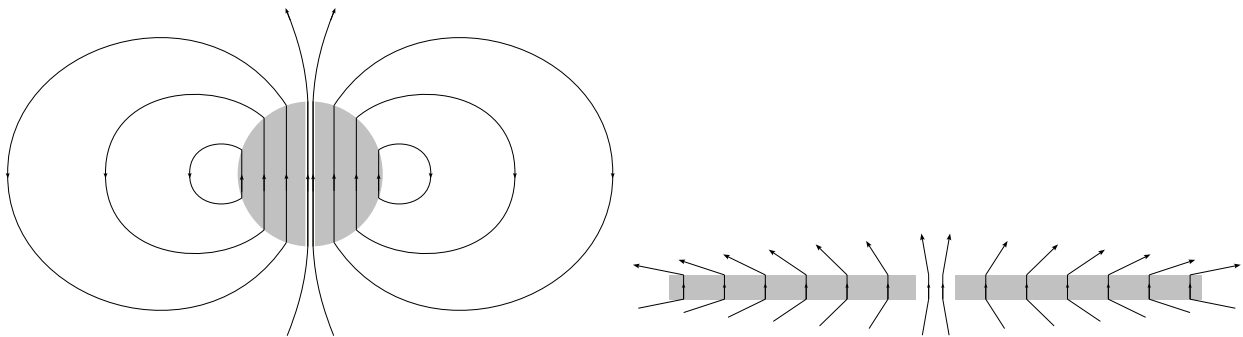


Рис. 4: Деформация проводящей сферы в диск. Сила Лоренца $\vec{j} \times \vec{B}$ превращает сферу в вытянутый диск без других сил.

r_{in} и радиус r в качестве граничных условий. Тогда точка r отождествляется с точкой поворота r_1 в потенциале U для моды с заданной энергией $E = -k_z^2 (U(r_1) = E)$. Возмущения могут расти в интервале $r_{\text{in}} \leq r \leq r_1$ и экспоненциально затухают при $r > r_1$.

Также отметим, что даже при отбрасывании «отталкивающего» члена $\frac{3}{4} \frac{1}{r^2}$ в потенциале U (19) сохраняется дискретный характер уровней энергии для МРН-мод. Отношение $(c_A)_{\text{cr}}/v_\phi(r)$ зависит от радиуса – оно велико на больших расстояниях и мало на малых (ср. (42) и (27)).

Приведенные выше соображения **применимы к случаю**, когда радиус r_0 лежит внутри потока, т.е. $r_0 < r_{\text{out}}$, где r_{out} – радиус внешнего диска. Качественный анализ показывает, что если $r_0 > r_{\text{out}}$, то критическая альфвеновская скорость с точностью до численного коэффициента равна динамической скорости при r_{out} , $(c_A)_{\text{cr}} \sim v_\phi(r_{\text{out}}) > v_\phi(r_0)$, т.е. для подавления МРН требуются более сильные магнитные поля.

Предыдущие исследования критического магнитного поля для подавления МРН в рамках глобального модального анализа можно найти, например, в работах [13, 12].

2.6 Как создать однородное магнитное поле в тонком диске?

Обсудим, как создать однородное магнитное поле в аккреционном диске (см. рис. 3). Сначала напомним, что это легко сделать в случае двух бесконечных хорошо проводящих цилиндров (слева на рис. 3) с токами, текущими в противоположных направлениях. Но как организовать токи в случае плоского проводящего диска, чтобы получить однородное магнитное поле внутри него (справа на рис. 3)? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу. Пусть у нас есть хорошо проводящая сфера с поверхностными токами $j_\phi \propto \sin \theta$, такими, что поле внутри сферы однородно. Плавно деформируем сферу в диск с сохраняющимся магнитным потоком $d\Phi_s = B_0 \cos \theta dS$, где $dS = 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta$ – элемент площади поверхности сферы, а θ – угол между нормалью к поверхности и магнитными линиями. На диске $d\Phi_d = B_d 2\pi r dr$ (B_d – поле в диске). Сохранение потока $\Phi_s = \Phi_d$ подразумевает: $2\pi R_0^2 \int B_0 \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi \int B_d r dr$. В случае однородного поля имеем $R_0^2 B_0 \sin^2 \theta + C = B_d r^2$. Константа C должна равняться нулю

из условия $\theta \rightarrow 0$ $r \rightarrow 0$. При $\theta = \pi/2$ для однородных полей находим радиус внешнего диска $r_d = R_0 \sqrt{B_0/B_d}$. Таким образом, мы построили диск с поверхностными токами, создающими излом линий магнитного поля на поверхности, и однородным магнитным полем внутри.

Теперь вырежем узкую область на рассматриваемой сфере вокруг вертикальной оси. Поскольку вблизи вертикальной оси поверхностные токи исчезают, удаление небольшой области вблизи оси не изменит существенно поле внутри сферы. Разумеется, такое преобразование изменяет топологию: сфера превращается в тор.

Можно также деформировать сферу в диск с сохранением магнитного потока, но с изменяющимся по радиусу магнитным полем $B_d(r)$. В процессе деформации изменяющееся магнитное поле вызывает индукционное электрическое поле, которое усиливает или уменьшает поверхностные токи в диске j_s . См. рис. 4. Должно быть ясно, что при такой деформации с сохранением магнитного потока можно получить любую зависимость магнитного поля от радиуса.

3 Магниторотационная неустойчивость с альфвеновской скоростью, зависящей от радиуса

До сих пор при рассмотрении МРН мы ограничивались случаем постоянной фоновой альфвеновской скорости. Однако в реальных астрофизических ситуациях альфвеновская скорость должна уменьшаться с радиусом как минимум также, как угловая скорость течения или даже быстрее. Мы рассмотрим ниже два случая: (1) когда c_A^2 зависит от радиуса как $v_\phi^2 \propto 1/r$ из-за переменной по радиусу плотности при постоянном фоновом поле и (2) когда $c_A^2 \propto 1/r^q$ при переменном фоновом магнитном поле с постоянной плотностью по радиусу.

3.1 Случай постоянного фонового магнитного поля

Квадрат альфвеновской скорости может линейно уменьшаться с радиусом, когда фоновое магнитное поле постоянно, но плотность течения увеличивается *линейно с радиусом*. Для переменной фоновой плотности ρ_0

уравнения (5–11) для линейных возмущений не меняются. Однако, вместо потенциала (19) с $c_A^2 = \text{const}$, эффективный потенциал принимает вид

$$U_e = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r^3 c_A^2} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2} + 3\epsilon v_\phi^2(r) \right]}{\left(\epsilon v_\phi^2(r) - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (43)$$

Здесь $\epsilon \equiv c_A^2/v_\phi^2 = \text{const}$ – параметр. В этом потенциале имеются те же характерные точки, как и предыдущем случае (см. раздел 2.3): r_0 , где $U_e(r_0) = 0$, точка поворота r_1 , где $E - U_e(r_1) = 0$, и внутренний радиус потока r_{in} .

Потенциал U_e обращается в ноль в точке

$$r_0 = \frac{4}{3} GM \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2} + 3\epsilon v_\phi^2(r_0) \right]}{\left(\epsilon v_\phi^2(r_0) - \frac{\omega^2}{k_z^2} \right)^2}. \quad (44)$$

Из этого уравнения находим дисперсионное уравнение $\omega(k_z)$:

$$\frac{3}{4} \epsilon \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 \epsilon v_\phi^2(r_0)} \right)^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 \epsilon v_\phi^2(r_0)} - 3 = 0 \quad (45)$$

с решением

$$\omega^2 = \epsilon v_\phi^2(r_0) k_z^2 \left(1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12\epsilon}}{\frac{3}{2}\epsilon} \right). \quad (46)$$

Режим МРН соответствует знаку минус перед квадратным корнем. Как и в разделе 2.4, критическое магнитное поле соответствует нейтральной моде $\omega^2 = 0$:

$$\epsilon_{\text{cr}} = \left(\frac{c_A(\mathbf{r}_0)}{v_\phi(r_0)} \right)^2 = 4. \quad (47)$$

Для малых $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} \omega^2 &\approx \epsilon v_\phi(r_0)^2 k_z^2 (-3 + \epsilon). \\ \omega^2 &\approx \epsilon v_\phi(r_0)^2 k_z^2 (-3 + \mathbf{12}\epsilon). \end{aligned} \quad (48)$$

Видно, что уравнение (46) дает такие же **максимальную скорость роста МРН и соответствующее ей значение альфвеновской скорости, что и ранее** (ср. уравнение (31)):

$$\epsilon = \left(\frac{c_A(\mathbf{r}_0)}{v_\phi(r_0)} \right)_{\max}^2 = \frac{5}{4}, \quad \omega_{\max}^2 = -\frac{3}{4} k_z^2 v_\phi^2(r_0). \quad (49)$$

Очевидно, что критическая альфвеновская скорость такая же как и выше (27).

Теперь рассмотрим точку поворота r_1 в потенциале U_e , определяемую из уравнения $-k_z^2 - U_e(r_1) = 0$. В безразмерных переменных $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$, $x = r/r_0$, уравнение для x_1 имеет вид:

$$\tilde{E} - \tilde{U}_e = \tilde{E} - \frac{3}{4} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{\epsilon x_1^2} \frac{3 + \mathbf{x}_1 K(\epsilon)}{(1 - x_1 K(\epsilon))^2} = 0, \quad (50)$$

где

$$K(\epsilon) = \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2(r_0)} = \left(1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 12\epsilon}}{\frac{3}{2}\epsilon} \right). \quad (51)$$

Обратим внимание, что «притягивающая» часть потенциала в уравнении (50) зависит от параметра ϵ . Заметим также, что в этом случае при малых $x \ll 1$ «отталкивающий» потенциал ведет себя как $1/x^2$ по сравнению с $1/x^3$ в случае ((21)). Уравнение (50) – это уравнение четвёртой степени для x_1 (ср. кубическое уравнение для x_1 в случае с постоянной c_A^2 (23)). При малых $x_1 \ll 1$ решение имеет вид

$$x_1^2 \approx -\frac{3}{\tilde{E}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (52)$$

(ср. с уравнением (24) для постоянной альфвеновской скорости).

3.2 **Случай с радиально зависимым фоновым магнитным полем**

Если **фоновое** магнитное поле зависит от радиуса, $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(r))$, линейаризованные уравнения МГД становятся более сложными. Радиальная и

вертикальная компоненты уравнения Эйлера (6) и (8) теперь записываются соответственно как:

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left[\frac{\partial(b_z B_z)}{\partial r} + ik_z b_r B_z \right], \quad (53)$$

$$i\omega u_z = ik_z \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{1}{4\pi\rho_0} b_r \frac{\partial B_z}{\partial r}. \quad (54)$$

Вертикальная компонента уравнения индукции (11) превращается в

$$i\omega b_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r B_z)}{\partial r}. \quad (55)$$

Действуя так же, как в разделе (2.3), после некоторых алгебраических преобразований мы получаем уравнение для b_r в виде:

$$\begin{aligned} & (c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2}) \left[\frac{\partial^2 b_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b_r}{r} \right) - b_r k_z^2 \right] + \frac{2\Omega \left(\frac{\omega^2}{k_z^2} \frac{\chi^2}{2\Omega} - c_A^2 r \frac{d\Omega}{dr} \right)}{(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2})} b_r = \\ & \frac{\partial c_A^2}{\partial r} \left\{ -\frac{b_r}{2r} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \left[-\frac{b_r}{2r} - \frac{\partial b_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{(\partial^2 c_A^2 / \partial r^2)}{(\partial c_A^2 / \partial r)} b_r + \frac{3}{4c_A^2} \frac{\partial c_A^2}{\partial r} b_r \right] \right\}. \quad (56) \end{aligned}$$

Для $c_A^2 = const$ правая часть уравнения зануляется. Ниже ограничимся случаем степенного поведения афльфовендовской скорости от радиуса. Подстановка $c_A^2 \propto r^{-q}$ в уравнение (56) дает для кеплеровского течения ($\chi^2 = \Omega^2 \propto 1/r^3$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 b_r}{\partial r^2} + \left[1 - q \frac{\frac{1}{2} c_A^2 + \frac{\omega^2}{k_z^2}}{(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2})} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b_r}{r} \right) + \\ & b_r \left\{ -k_z^2 + \frac{GM}{r^3} \frac{[\frac{\omega^2}{k_z^2} + 3c_A^2]}{(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2})^2} + \frac{q}{r^2} \frac{(\frac{q}{2} - 1) \frac{\omega^2}{k_z^2} - (1 + \frac{3}{4}q) c_A^2}{(c_A^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2})} \right\} = 0. \quad (57) \end{aligned}$$

Уравнение (57) может быть переписано как

$$b_r'' + g(r)b_r' + f(r) = 0, \quad (58)$$

$$g(r) = \frac{1}{r} \frac{(1-\frac{q}{2}) - (q+1) \left(\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)} \quad (59)$$

$$f(r) = -k_z^2 + \frac{GM}{c_A^2 r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} - \frac{g(r)}{r} + \frac{q}{r^2} \frac{\left(\frac{q}{2} - 1 \right) \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} - \left(1 + \frac{3}{4} q \right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)} \quad (60)$$

Первая производная из этого уравнения может быть исключена стандартным способом путем замены $z = b_r \exp\{-\frac{1}{2} \int^r g(s) ds\}$, что приводит к уравнению

$$z'' + \left(f - \frac{g'}{2} - \frac{g^2}{4} \right) z = 0. \quad (61)$$

Подставляя в (61) функции f и g , мы получаем уравнение

$$z'' + \left\{ -k_z^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{q}{r^2} \frac{\frac{13}{16}q + \frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} (q + \frac{1}{2})}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} + \frac{GM}{c_A^2 r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} \right\} z = 0. \quad (62)$$

Очевидно, что оно сводится к уравнению (17) для постоянного фонового поля $q = 0$. Для случая $q \neq 0$ эффективный потенциал в уравнении, подобном уравнению Шрёдингера (62), имеет вид:

$$U_q = \frac{3}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{q}{r^2} \frac{\frac{13}{16}q + \frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} (q + \frac{1}{2})}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} - \frac{GM}{c_A^2 r^3} \frac{\left[\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3 \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2} \quad (63)$$

Потенциал U_q обращается в ноль при любом q в точке

$$r_0 = \frac{GM}{c_A^2} \frac{\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} + 3}{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2} \left(q^2 + \frac{q}{2} \right) + \left(\frac{13}{16} q^2 + \frac{q}{2} \right)} \quad (64)$$

Дисперсионное уравнение в точке r_0 имеет вид:

$$\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2(r_0)} = 1 + \frac{2}{3} \left\{ q^2 + \frac{q}{2} + \left(\frac{v_\phi(r_0)}{c_A(r_0)} \right)^2 \pm \sqrt{\left(q^2 + \frac{q}{2} + \left(\frac{v_\phi(r_0)}{c_A(r_0)} \right)^2 \right)^2 + 12 \left(\frac{v_\phi(r_0)}{c_A(r_0)} \right)^2 + \frac{9}{16} q^2} \right\}. \quad (65)$$

Режим МРН соответствует знаку минус перед квадратным корнем. Нулевая мода $\omega^2 = 0$ соответствует критическому магнитному полю

$$\left(\frac{c_A(r_0)}{v_\phi(r_0)} \right)_{\text{cr}}^2 = \frac{4}{1 + \frac{2}{3}q + \frac{13}{12}q^2}. \quad (66)$$

Используя тождество

$$\left(\frac{v_\phi}{c_A} \right)^2 = \left(\frac{v_\phi}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left(\frac{(c_A)_{\text{cr}}}{c_A} \right)^2, \quad (67)$$

перепишем дисперсионное уравнение (65) в форме, аналогичной (29), как функцию от безразмерной величины $\left(\frac{(c_A)_{\text{cr}}}{c_A} \right)^2$:

$$\frac{\omega^2}{(c_A)_{\text{cr}}^2 k_z^2} = \left(\frac{c_A}{(c_A)_{\text{cr}}} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left\{ q^2 + \frac{q}{2} + \left(\frac{v_\phi}{c_A} \right)^2 \pm \sqrt{\left(q^2 + \frac{q}{2} + \left(\frac{v_\phi}{c_A} \right)^2 \right)^2 + 12 \left(\frac{v_\phi}{c_A} \right)^2 + \frac{9}{16} q^2} \right\} \right]. \quad (68)$$

(см. Рис. (5)). (В формуле (68) $\left(\frac{v_\phi}{c_A} \right)^2$ выражается через (66) и (67)).

Используем, как и выше, безразмерные переменные $x = r/r_0$, $c_A^2 = c_A^2(r_0)x^{-q}$, параметр $\epsilon = (c_A^2(r_0)/v_\phi^2(r_0))$ и обозначим правую часть из уравнения (65) $\frac{\omega^2}{k_z^2 c_A^2(r_0)} = K(\epsilon)$. Тогда безразмерный потенциал $\tilde{U}_q = U_q r_0^2$ принимает вид

$$\tilde{U}_q(x, \epsilon, q) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\frac{13}{16}q^2 + \frac{q}{2} - K(\epsilon)x^q(q^2 + \frac{q}{2})}{(1 - K(\epsilon)x^q)^2} \right) - \frac{1}{x^{3-q}} \frac{(3 + K(\epsilon)x^q)}{\epsilon(1 - K(\epsilon)x^q)^2}. \quad (69)$$

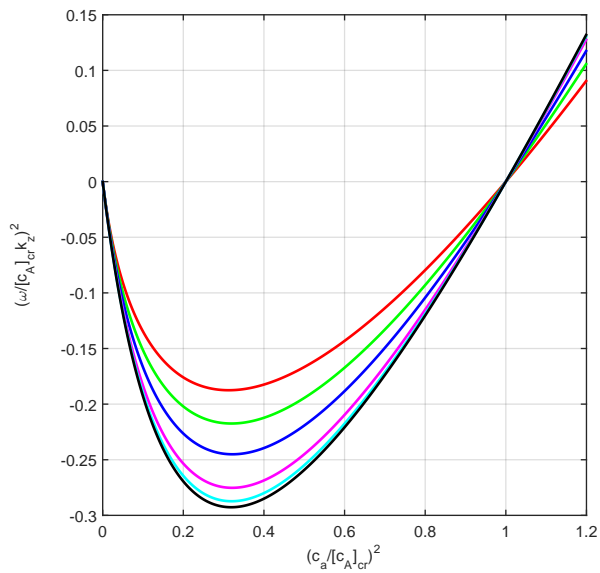


Рис. 5: Дисперсионные кривые МРН (65) для различных q . Сверху вниз: $q = 0$ (красная линия), $q = 0.5$ (зеленая линия), $q = 1$ (синяя линия), $q = 2$ (пурпурная линия), $q = 3$ (голубая линия), $q = 4$ (черная линия). В пределе $c_A/[c_A]_{cr} \ll 1$ дисперсионное уравнение имеет вид (30) для всех q .

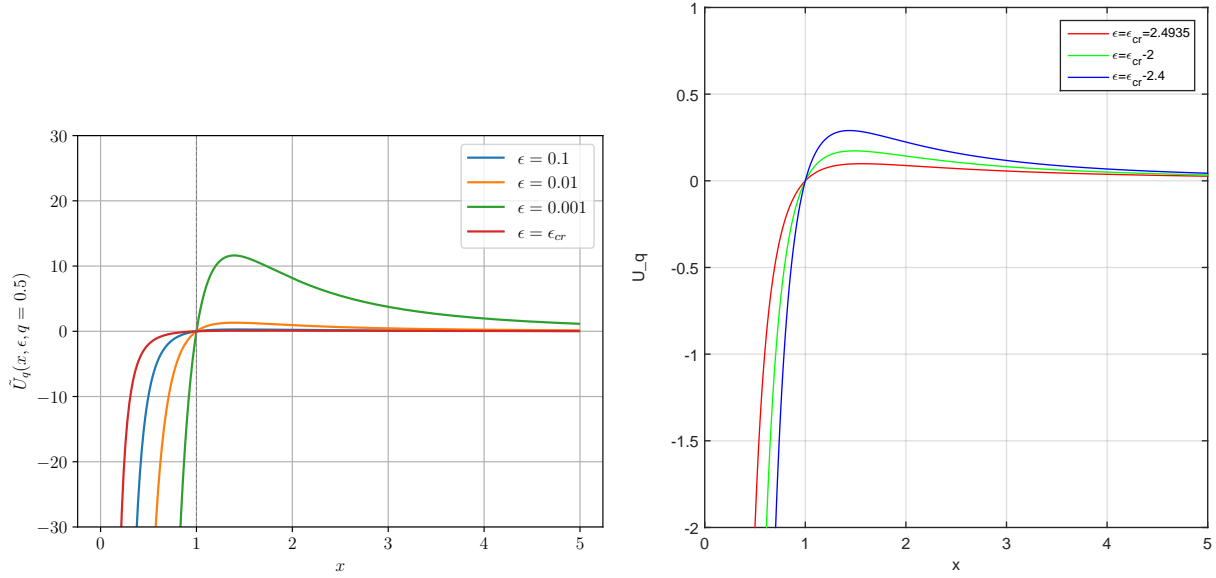


Рис. 6: Эффективный потенциал $\tilde{U}_q(x, \epsilon, q)$ (69) для $q = 0.5$ и различных значений параметра $\epsilon = c_A^2(r_0)/v_\phi^2(r_0)$. Критическое значение ϵ_{cr} находится из уравнения (66).

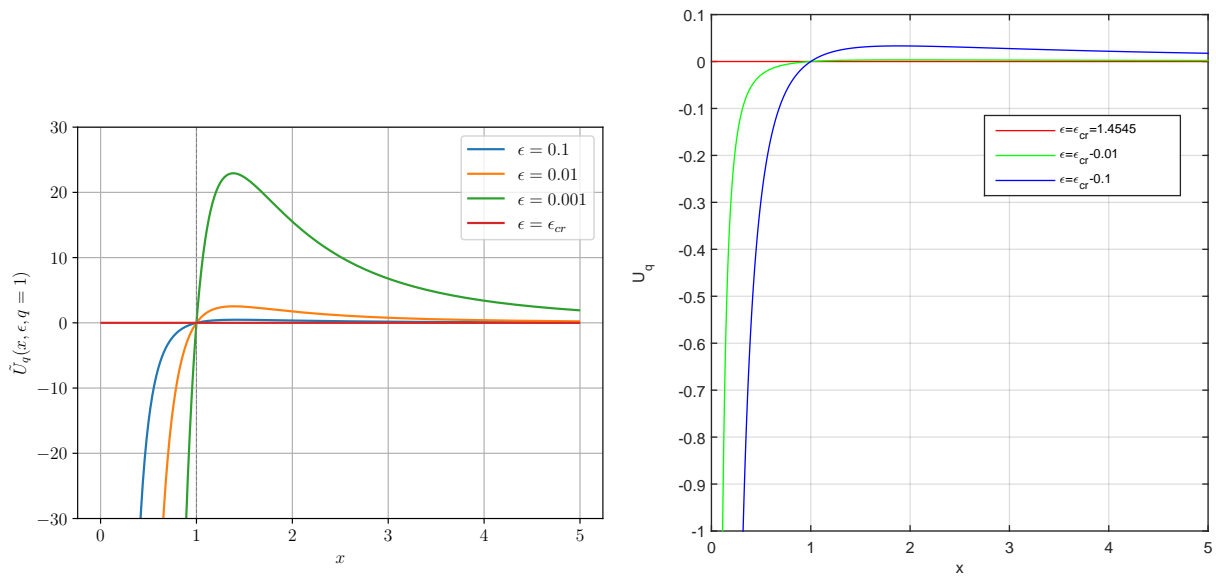


Рис. 7: То же, что на Рис. 6 для $q = 1$.

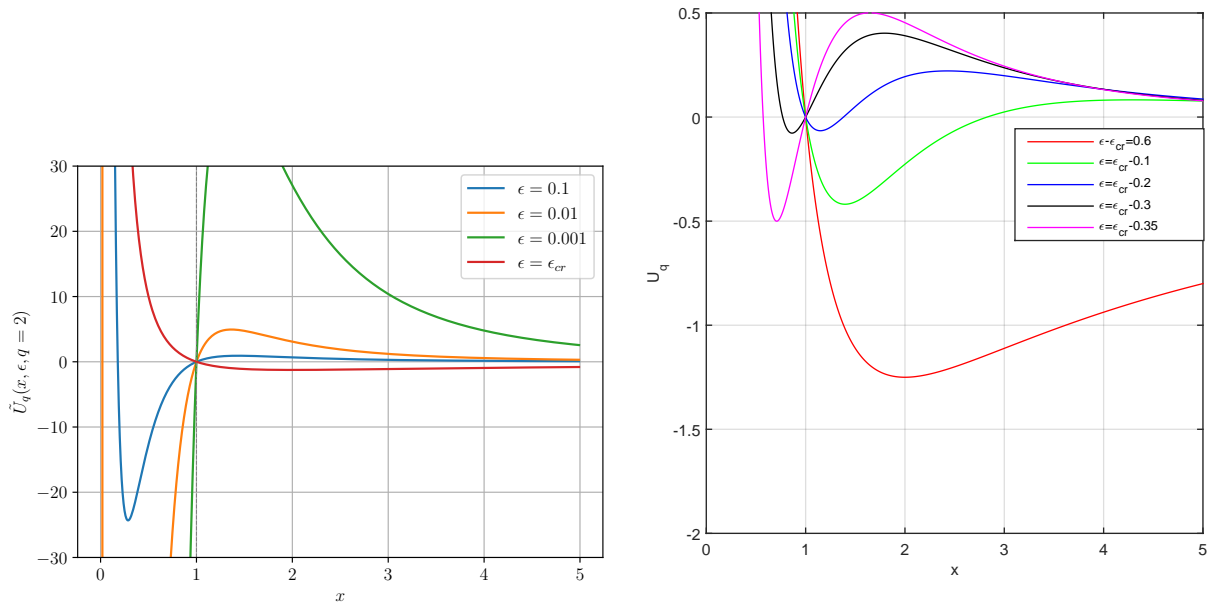


Рис. 8: То же, что на рис. 6 для $q = 2$. Отметим появление второй нулевой точки потенциала с уменьшением параметра ϵ .

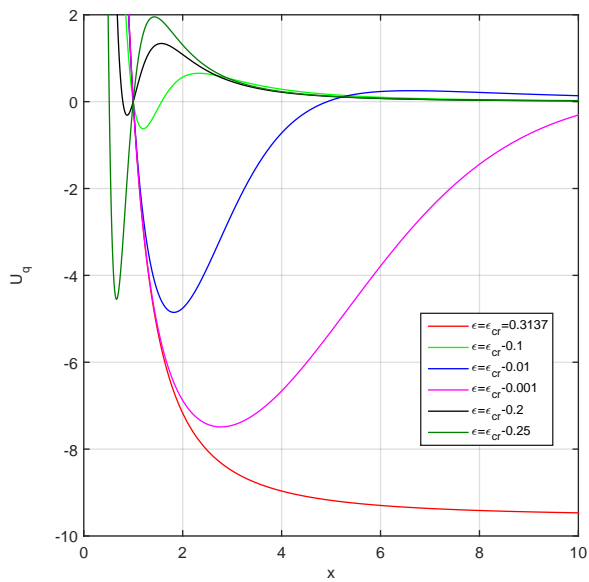


Рис. 9: То же, что на рис. 6 для $q = 3$.

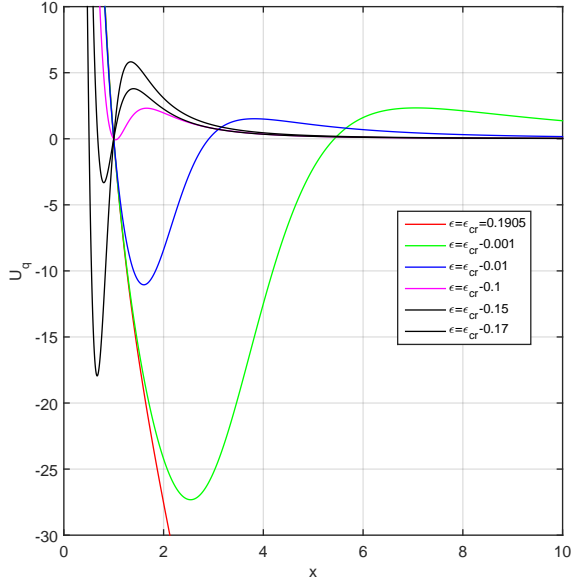


Рис. 10: То же, что на Рис. 6 для $q = 4$.

Заметим, что в случае $q \neq 0$, как «отталкивающая», так и «притягивающая» части эффективного потенциала зависят от ϵ .

Обсудим некоторые особенности потенциала \tilde{U}_q .

1. По построению, $\tilde{U}_q(1, \epsilon, q) = 0$ для любого ϵ, q .
2. При $\epsilon \rightarrow \epsilon_{cr}$ (66), $K(\epsilon) \rightarrow 0$:

$$\tilde{U}_q(x, \epsilon \rightarrow \epsilon_{cr}, q) = \left(\frac{3}{4} + \frac{13}{16}q^2 + \frac{q}{2} \right) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^{3-q}} \right). \quad (70)$$

Потенциал $\tilde{U}_q(x, \epsilon \rightarrow \epsilon_{cr}, q = 1) = 0$ для любого x . Для $q < 1$, \tilde{U}_q меняет знак с отрицательного на положительный при $x = 1$, и наоборот для $q > 1$.

3. Для $q < 1$ существует только одна нулевая точка потенциала: $\tilde{U}_q(x = 1, \epsilon, q < 1) = 0$.
4. Для $q > 1$, при $x < 1$ в потенциале \tilde{U}_q появляется вторая нулевая точка x_2 с предельным поведением $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_2 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{U}_q(x, \epsilon, q) \rightarrow$

$+\infty$. То есть потенциал достигает минимума в некоторой точке x_{\min} : $x_2 < x_{\min} < 1$.

Эти особенности эффективного потенциала \tilde{U}_q для различных q и ϵ показаны на рис. (6)-(10). Видно, что для $q \leq 1$ эффективный потенциал \tilde{U}_q имеет ту же форму, что и для $q = 0$ (см. рис. 1), и анализ режимов МРН не меняется. Для $q > 1$ появляется минимум эффективного потенциала $x_2 < x_{\min} < 1$, и неустойчивые уровни энергии следует искать между двумя точками поворота для соответствующих эффективных энергий $\tilde{E} = -k_z r_0^2$. В отличие от случая $q = 0$ существует минимум энергии $\tilde{E}_{\min} = \tilde{U}_q(x_{\min}, \epsilon, q)$.

Важно отметить, что для случаев с $q > 1$ и $x_{\text{in}} \ll 1$, для уровней энергии $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$, могут появиться две точки поворота в эффективном потенциале \tilde{U}_q ($[x_1]_{\min}$ и $[x_1]_{\max}$). Возможно также, что $\tilde{E} < [\tilde{U}_q]_{\min}$, и стабильных отрицательных уровней энергии (соответствующих модам МРН) не существует. Если безразмерный радиус внутреннего диска x_{in} попадает между корнями эффективного потенциала \tilde{U}_q , то в точке x_{in} возникает свободная граница течения как в рассмотренном выше случае $q = 0$.

Таким образом, анализ формы эффективного потенциала \tilde{U}_q свидетельствует о необходимости его учета при рассмотрении глобальной МРН в конкретных физических случаях.

4 Итоги и обсуждение

1. Нелокальный модальный анализ с постоянным фоновым магнитным полем. Мы заново рассмотрели развитие магниторотационной неустойчивости в кеплеровских течениях идеальной жидкости. Мы показали, что учет радиальной нелокальности при анализе возмущений в форме $f(r)e^{i(\omega t - k_z z)}$ приводит к появлению члена $-\frac{3}{4}\frac{1}{r^2}$ в уравнении (17) для малых возмущений. Уравнение для малых возмущений имеет вид стационарного уравнения Шредингера с эффективным потенциалом, определяющим (в виде дисперсионного уравнения) область отрицательных значений ω^2 — область роста МРН. Нейтральной моде $\omega^2 = 0$ соответствует критическое магнитное поле (28). Критическое поле в терминах альфвеновской скорости c_A^2 равно $(c_A)_{\text{cr}}^2 = 4GM/r_0$, где r_0 — нулевая точка потенциала U (19) в

уравнении (17).

Вторым важным результатом является значительное уменьшение (по сравнению с локальным анализом) скорости роста МРН для случая $c_A^2 \ll (c_A)_{\text{cr}}^2$ (см. уравнение (37)). Действительно, пренебрегая членом $-\frac{3}{4}\frac{1}{r^2}$ в уравнении (17) и заменяя производную $\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow -ik_r$, уравнение (17) превращается в алгебраическое уравнение четвёртой степени с решением

$$\omega^2 = \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 \left[c_A^2 k_z^2 + \frac{\Omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\Omega^4}{4} + 4\Omega^2 c_A^2 k^2} \right] \quad (71)$$

(здесь $k^2 = k_r^2 + k_z^2$). Максимальная скорость роста неустойчивости в этом случае не зависит от напряженности магнитного поля:

$$\omega_{\text{max}}^2 = -\frac{9}{16} \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 \Omega^2. \quad (72)$$

Мы подчеркиваем разницу между локальным результатом (72) и нелокальным результатом (36). Несмотря на совпадение численного коэффициента $9/16$ в уравнениях (72) и (36), в нелокальном подходе появляется критическое магнитное поле, **подавляющее МРН**, которое отсутствовало в локальном модальном анализе (см., например, в [18]). В глобальном анализе максимальная скорость роста МРН достигается при определенном значении альфвеновской скорости, $(c_A/(c_A)_{\text{cr}})^2 = 5/16$ (см. **Рис 2** и (31)). Тот факт, что МРН возникает только при достаточно слабом магнитном поле, был отмечен уже в первой работе Бальбуса и Хаули [6] (см. также, например, более поздние исследования [19, 20] и т.д.). При малых магнитных полях, $c_A \ll (c_A)_{\text{cr}}$, инкремент неустойчивости подавляется на фактор $3(c_A/(c_A)_{\text{cr}})$, см. уравнение (37).

Мы отмечаем, что, как показывает численный анализ (см. Приложение А), в «мелких» потенциальных ямах с безразмерным внутренним радиусом течения $x_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_0 > 0.5876$ не существует стационарных собственных мод (17), т.е. там отсутствует МРН. При $x_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_0 < 0.5876$ возникают стационарные уровни, соответствующие очень малым k_z и большим длинам волн возмущений. Число стационарных уровней возрастает по мере уменьшения x_{in} . В тонких кеплеровских аккреционных дисках возмущения с длинами волн $\lambda = 2\pi/k_z$ меньше полутолщины диска h существуют только в «глубоких» потенциальных ямах с $\log x_{\text{in}} < -3.575$. Поэтому МРН в стандартной

формулировке (сдвиговый поток, погруженный в постоянное полоидальное магнитное поле) не всегда работает в тонких аккреционных дисках. Например, в аккреционных дисках вокруг обычных звезд (неглубокие потенциалы) внутренний радиус диска может быть слишком большим для появления коротковолновых неустойчивых мод, в то время как в аккреционных дисках вокруг компактных звезд (глубокие потенциалы) возможны неустойчивые моды с длиной волны меньше толщины диска.

2. Нелокальный модальный анализ с радиально изменяющимся фоновым магнитным полем. Мы впервые провели нелокальный модальный анализ МРН с переменной фоновой альфвеновской скоростью $c_A(r)$ и подробно рассмотрели случай степенной зависимости $c_A^2(r) \propto r^{-q}$ в кеплеровских течениях (**уравнения для малых возмущений поля (56) и (57), соответственно**). Мы обнаружили, что максимальная скорость роста МРН увеличивается с ростом q (Рис. 5). Кроме того, в этом случае безразмерный потенциал \tilde{U}_q (69) зависит как от q , так и от параметра $\epsilon = c_A^2(r_0)/v_\phi^2(r_0)$. Для $q > 1$ потенциал $\tilde{U}(q, \epsilon)$ качественно меняется с уменьшением ϵ от критического значения (соответствующего нулевой моде $\omega^2 = 0$, (66)): появляются две точки поворота справа и слева от нулевой точки r_0 (см. рис. (8)-(10)). Очевидно, что результат нелокального анализа МРН будет зависеть от положения внутренней границы потока x_{in} относительно нулевых точек эффективного потенциала.

Мы провели нелокальный анализ МРН в аккреционных дисках, усредняя плотность по z -координате, сведя, таким образом, анализ к случаю с постоянной плотностью. Анализ с учетом уменьшения плотности по z -координате усложняется: возмущения должны искажаться в виде $f(r)f(z)e^{i\omega t}$, и требуется нахождение функции $f(z)$ с учетом граничных условий. Однако, при уменьшении плотности в постоянном магнитном поле возникает стабилизация возмущений магнитными силами. Эта задача требует отдельного рассмотрения.

Таким образом, нелокальный анализ МРН показывает необходимость учета специфических особенностей течения. Мы рассмотрели здесь только полоидальное фоновое магнитное поле. В реальных ситуациях могут существовать как полоидальные, так и тороидальные компоненты фонового магнитного поля. Тороидальное магнитное поле в плоскости диска должно быть подвержено паркерской неустойчивости [5], которая возникает в

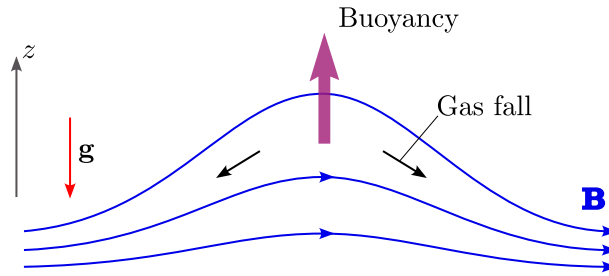


Рис. 11: Схема паркеровской неустойчивости.

поле тяжести (см. рис. (11)). Подробное описание паркеровской неустойчивости в аккреционных дисках см. например, в [21]. Неустойчивость Паркера в аккреционных дисках может быть названа «магнито-гравитационной неустойчивостью».

Благодарности

Работа поддержана грантом РФФ 21-12-00141. Авторы благодарят участников семинаров отдела релятивистской астрофизики ГАИШ МГУ и теоретдела ФИАН за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **36** 1398 (1959)
2. Chandrasekhar S *Proceedings of the National Academy of Science* **46** 253 (1960)
3. Lord Rayleigh *Proc. R. Soc. A* **93** 143 (1916)
4. Rayleigh L *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **93**(648) 148 (1917)
5. Parker E N *ApJ* **145** 811 (1966)
6. Balbus S A, Hawley J F *ApJ* **376** 214 (1991)

7. Balbus S A, Hawley J F *Reviews of Modern Physics* **70** 1 (1998)
8. Hawley J F, Gammie C F, Balbus S A *ApJ* **440** 742 (1995)
9. Sorathia K A et al. *ApJ* **749** 189 (2012)
10. Hawley J F et al. *ApJ* **772** 102 (2013)
11. Curry C, Pudritz R E, Sutherland P G *ApJ* **434** 206 (1994)
12. Latter H N, Fromang S, Faure J *MNRAS* **453**(3) 3257 (2015)
13. Papaloizou J, Szuszkiewicz E *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **66**(1) 223 (1992)
14. Shakura N I, Lipunova G V *MNRAS* **480**(3) 4273 (2018)
15. Shakura N, Postnov K *MNRAS* **448**(4) 3697 (2015)
16. Landau L, Lifshitz E *Quantum Mechanics. Non-relativistic theory*, (London: Pergamon Press Ltd.1977)
17. Dubrulle B, Knobloch E *A&A* **274** 667 (1993)
18. Shakura N, Postnov K in N Shakura (Ed.) *Astrophysics and Space Science Library* volume 454 of *Astrophysics and Space Science Library* 393 (2018)
19. Salmeron R, Königl A, Wardle M *MNRAS* **375**(1) 177 (2007)
20. Bai X N, Stone J M *ApJ* **769**(1) 76 (2013)
21. Kato S, Fukue J, Mineshige S *Black-hole accretion disks*, (Kyoto, Japan: Kyoto University Press1998)
22. Flugge S *Practical Quantum Mechanics, 2 volumes*, (Berlin, New York, Springer-Verlag1971)

А Численное решение уравнения (17)

Решим непосредственно уравнение (17). В безразмерных переменных $x = r/r_0$ и $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$, уравнение (17) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left\{ \tilde{E} - \tilde{U} \right\} \Psi = 0, \quad \tilde{U} = \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^3} \quad (73)$$

Амплитуда функции Ψ произвольна, **выбираем** $\Psi(x_1) = 1$. Граничное условие на внутренней границе течения может быть $\Psi'(x_{\text{in}}) = 0$ или $\Psi(x_{\text{in}}) = 0$.

Нулевые граничные условия соответствуют задаче, в которой магнитное поле не проникает через границы ($b_r = 0$ и, в нашем случае, возмущение радиальной скорости $u_r = 0$ согласно (13)). Это может быть, например, течение Ю ограниченное проводящим цилиндрами с соленоидом, создающими вертикальное магнитное поле. В этом случае безразмерный потенциал $\tilde{U}(x_{\text{in}}) = \infty$ (см. работу [1]), и решения строятся между внутренней «стенкой» при x_{in} и точкой поворота x_1 .

Граничное условие с нулевой первой производной на внутренней границе течения, $\Psi'(x_{\text{in}}) = 0$, соответствует свободной границе, которая больше подходит для кеплеровского диска вокруг гравитирующего центра. В точке поворота x_1 условие $\Psi''(x_1) = 0$ автоматически удовлетворяется по смыслу точки поворота, в которой $\tilde{U}(x_1) = \tilde{E}$. Поэтому в качестве граничного условия в точке поворота следует взять значение первой производной $\Psi'(x_1)$. Его легко найти, заметив, что при малых $\xi = x - x_1 \ll 1$, уравнение (73) сводится к уравнению Эйри

$$\Psi''(z) + z\Psi = 0 \quad (74)$$

где

$$z = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{x_1^3} - \frac{9}{4} \frac{1}{x_1^4} \right)^{1/3} \xi. \quad (75)$$

Решение уравнения (74) для положительных z (отрицательных ξ , $x < x_1$, слева от точки поворота x_1) является линейной комбинацией функций Бесселя

$$\text{Ai}(z) = \frac{\sqrt{z}}{3} \left[J_{1/3} \left(\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right) \right], \quad (76)$$

а для отрицательных $z < 0$ (справа от точки поворота x_1) выражается через модифицированную функцию Бесселя

$$\text{Ai}(-z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{-z}{3}} K_{1/3} \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right]. \quad (77)$$

В точке x_1 , $\xi = z = 0$, и первая производная равна:

$$\left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x_1} = \left. \frac{d\Psi}{dz} \frac{dz}{dx} \right|_{x_1} = \text{Ai}'(0) \left[\frac{3}{2} \frac{1}{x_1^3} - \frac{9}{4} \frac{1}{x_1^4} \right]^{1/3}, \quad (78)$$

где $\text{Ai}'(0) = 0.25882\dots$

Интегрирование уравнения (73) с граничными условиями $\Psi'(x_{\text{in}}) = 0$ и (78) для различных значений x_{in} дает семейство решений с дискретными (неэквидистантными) «энергетическими уровнями» \tilde{E}_n (или, что то же самое по (23), с дискретными точками поворота x_1), соответствующих целому числу $n = 0, 2, 3, \dots$ нулей функции Ψ . Заметим, что для данного x_{in} существует различное число возможных энергетических уровней, и существует максимальное значение $(x_{\text{in}})_{\text{max}} \approx 0.5876$, допускающее существование единственного уровня при $n = 0$ (см. рис. 12). Решения, нормированные на максимальное значение функции Ψ , показаны на рис. 12.

Отметим, что уравнение (73) можно решить в квазиклассическом (ВКБ) приближении, используя условие Бора-Зоммерфельда для стационарных уровней энергии $E = -k_z^2 < 0$ с номером $n = 0, 1, 2, \dots$ в потенциале U [16, 22]:

$$\int_{r_{\text{in}}}^{r_1} \sqrt{E - U} dr = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (79)$$

Здесь r_1 – точка поворота в потенциале U , которую можно найти из уравнения (22). Существование стационарных уровней с отрицательной энергией и $\omega^2 < 0$ сигнализирует о неустойчивости течения.

В безразмерных единицах с энергией $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2$ и потенциалом \tilde{U} , уравнение (79) принимает вид

$$\int_{x_{\text{in}}}^{x_1} \sqrt{\tilde{E} - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{4x^3}} dx = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right). \quad (80)$$

В случае большой длины волны возмущений $\tilde{E} = -k_z^2 r_0^2 \ll 1$. При малых энергиях $\tilde{E} \approx 0$, точка поворота стремится к нулю потенциала, $r_1 \rightarrow r_0$, интеграл в уравнении (80) имеет вид

$$\int_{x_{\text{in}}}^1 \sqrt{-\frac{3}{4x^2} + \frac{3}{4x^3}} dx = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right). \quad (81)$$

Этот интеграл берется:

$$\sqrt{3} \left[\sqrt{\frac{1}{x_{\text{in}}} - 1} + \arcsin \sqrt{x_{\text{in}}} - \frac{\pi}{2} \right] = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right) \quad (82)$$

(ср. с уравнением (2.24) для случая изомоментного вращения с круговой скоростью $v_\phi \propto 1/r$ в оригинальной статье Велихова [1]; здесь мы рассматриваем кеплеровский случай с $v_\phi \propto 1/\sqrt{r}$). Из уравнения (82) мы находим первое x_{in} для $n = 0$: $x_{\text{in}} \approx 0.575$. Точное значение, которое мы нашли численно (см. рис. 13), равно $(x_{\text{in}})_{\text{max}} \approx 0.588$. Для $x_{\text{in}} > (x_{\text{in}})_{\text{max}}$ потенциальная яма настолько мала, что не существует стационарных «энергетических уровней». Напомним, что точность ВКБ-аппроксимации возрастает при больших n . В нашем случае при $x_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_0 \ll 1$ дискретными значениями x_{in} являются:

$$x_{\text{in}} = \frac{1}{\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(n + \frac{3}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right]^2 + 1}. \quad (83)$$

В принципе, можно численно взять интеграл в (80) для любого значения \tilde{E} , чтобы найти дискретные уровни энергии \tilde{E}_n при фиксированных x_{in} (особенно при больших $|\tilde{E}|$, относящихся к тонким аккреционным дискам, см. выше) для любого n . Однако выше уже были получены точные численные решения уравнения (73).

Отметим, что при игнорировании члена $\frac{3}{4} \frac{1}{x^2}$ в уравнении (80) его можно решить аналитически (см. [12]). Решение ВКБ оказалось в отличном согласии с численными результатами.

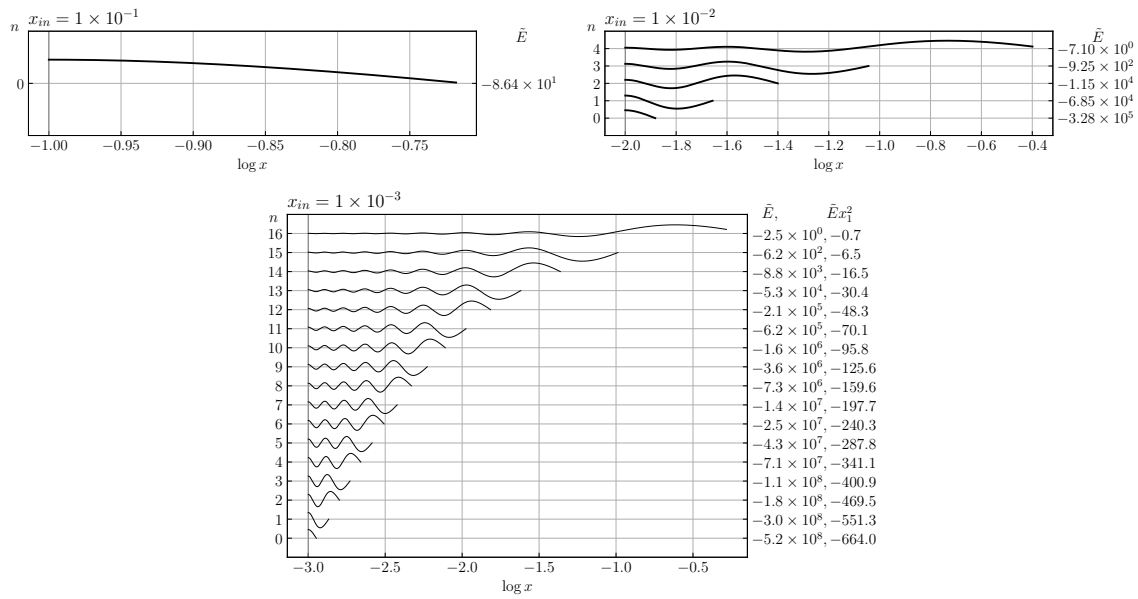


Рис. 12: Нормированные решения уравнения (73) Ψ/Ψ_{\max} с граничным условием $\Psi'(x_{in}) = 0$ и $\Psi'(x_1)$ из (78), которое соответствует граничному условию $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 0$, для $x_{in} = 10^{-1}, 10^{-2}$ и 10^{-3} . С уменьшением x_{in} (углублением потенциальной ямы) число стационарных отрицательных энергетических уровней увеличивается. Для четных уровней ($n = 0, 2, \dots$) условие $\Psi(x_1) = 1$. Для нечетных уровней ($n = 1, 3, \dots$) условие $\Psi(x_1) = -1$. Квазиэкспоненциально затухающая часть решения при $x > x_1$ не показана.

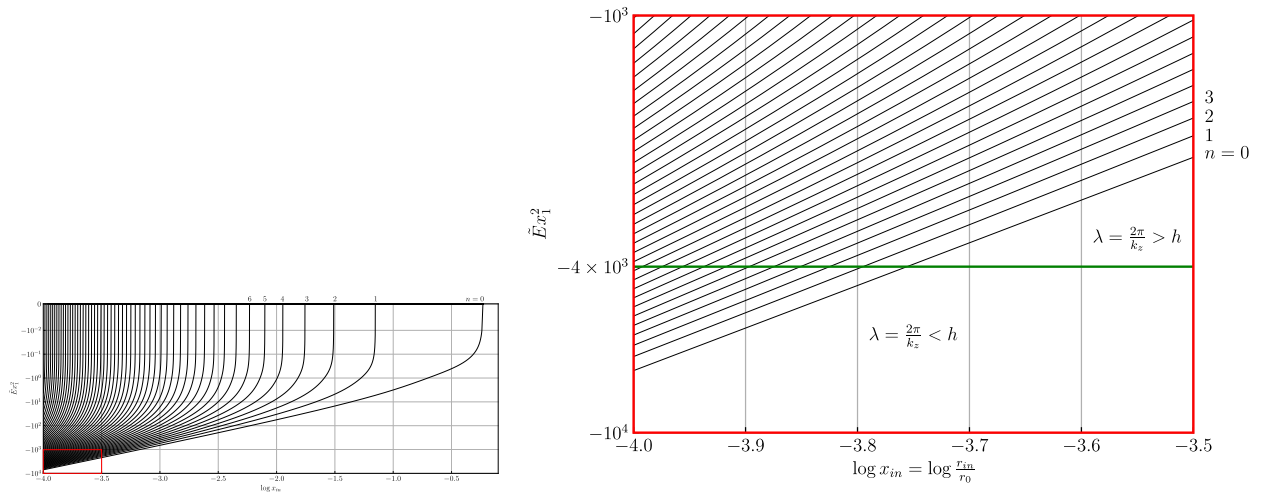


Рис. 13: Дискретные «энергетические уровни» $\tilde{E} = -(k_z r_0)^2$ уравнения Шрёдингера для различных внутренних границ x_{in} показаны на графике $\tilde{E} x_1^2(\log x_{in})$. Чем меньше x_{in} , тем больше число дискретных «энергетических уровней» $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ функции Ψ . Глубокие «энергетические уровни» с $-\tilde{E} x_1^2 > 4 \times 10^3$ возникают при $\log x_{in} < -3.756$. Существует максимальное значение $x_{in} \approx 0.5876$ с $\tilde{E} \rightarrow 0$ и $x_1 \rightarrow 1$ для $n = 0$ собственной моды.

On the appearance of non-local MRI in Keplerian accretion discs

N. I. Shakura¹ K. A. Postnov^{1,2}, D. A. Kolesnikov¹, G. V. Lipunova¹

¹Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University, Moscow, Russia

²Kazan Federal University, Kazan, Russia

We revisit the modal analysis of small perturbations in Keplerian ideal gas flows with constant vertical magnetic field leading to magneto-rotational instability (MRI) using the non-local approach. In the general case, MRI modes are described by a Schrödinger-like differential equation with some effective potential including 'repulsive' ($1/r^2$) and 'attractive' ($-1/r^3$) terms and are quantized. In shallow potentials, there are no stationary 'energy levels'. In thin Keplerian accretion discs, the perturbation wavelengths $\lambda = 2\pi/k_z$ are smaller than the disc semi-thickness h only in 'deep' potential wells. We find that there is a critical magnetic field for the MRI to develop. The instability arises for magnetic field below this critical value. In thin accretion discs, at low background Alfvén velocity $c_A \ll (c_A)_{cr}$ the MRI instability increment ω is suppressed compared to the value obtained in the local perturbation analysis, $\omega \approx -\sqrt{3}ic_A k_z$. We also investigate for the first time the case of radially variable background magnetic field.

Key words: accretion discs, ...