

# Аккреционные процессы в астрофизике

## Глава 1

*под редакцией Н. И. Шакуры*

Авторы-составители главы 1: Г. В. Липунова, К. Л. Маланчев

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Стандартная модель дисковой аккреции</b>	<b>7</b>
1.1	Введение . . . . .	7
1.2	Вывод уравнений дисковой аккреции . . . . .	10
1.3	Вязкость в аккреционных дисках . . . . .	13
1.3.1	Уравнения Рейнольдса. Тензор Рейнольдса . . . . .	14
1.3.2	Проблема замыкания . . . . .	17
1.3.3	Коэффициент турбулентной вязкости . . . . .	18
1.3.4	Путь перемешивания . . . . .	20
1.3.5	Параметр турбулентной вязкости $\alpha$ . . . . .	22
1.4	Тонкие диски . . . . .	25
1.4.1	Уравнения радиальной структуры . . . . .	25
1.4.2	Решение при постоянном темпе аккреции . . . . .	26
1.4.3	Радиальная скорость вещества в тонком диске . . . . .	27
1.4.4	Аккреция на черную дыру . . . . .	28
1.4.5	Энерговыделение в геометрически тонких дисках . . . . .	33
1.4.6	Спектр диска . . . . .	35
1.5	Стационарные $\alpha$ -диски . . . . .	38
1.5.1	Уравнения вертикальной структуры . . . . .	38
1.5.2	Решение вертикальной структуры . . . . .	42
1.5.3	Радиальные зависимости физических параметров в стационарных $\alpha$ -дисках . . . . .	51
1.6	Нестационарная дисковая аккреция . . . . .	60
1.6.1	Основное уравнение нестационарной аккреции . . . . .	60
1.6.2	Решения линейного уравнения вязкой эволюции диска . . . . .	62
1.6.3	Эволюция вязкого диска неограниченного размера . . . . .	63
1.6.4	Решение для диска с фиксированным внешним радиусом . . . . .	67

1.6.5	Решения нелинейного уравнения эволюции вязкого $\alpha$ -диска . . . . .	73
1.6.6	Эволюция $\alpha$ -диска из кольца вещества . . . . .	77
1.6.7	Решение для $\alpha$ -диска в двойной системе . . . . .	89
1.7	Численное моделирование нестационарной дисковой аккреции . . . . .	101
1.7.1	Решение уравнения вязкой эволюции . . . . .	101
1.7.2	Решение уравнений вертикальной структуры . . . . .	107
1.7.3	Пример численного моделирования кривой блеска рентгеновской Новой типа FRED . . . . .	110
1.8	Еще о выводе уравнений дисковой аккреции . . . . .	120
1.9	Неконсервативный диск . . . . .	125
1.10	Уточненная связь между $\nu_t$ и $\alpha$ . . . . .	128

# Список иллюстраций

1.1	Координаты в плоском потоке . . . . .	19
1.2	Момент импульса $h$ и момент вязких сил $F(h)$ в стационарном диске . . . . .	31
1.3	Форма спектра аккреционного диска . . . . .	36
1.4	Коэффициент непрозрачности . . . . .	44
1.5	Вертикальная структура диска . . . . .	48
1.6	Безразмерные факторы $\Pi_z$ , $\Pi_\Sigma$ , $\Pi_\rho$ и $\Pi_T$ . . . . .	54
1.7	Радиальные зависимости в стационарном $\alpha$ -диске . . . . .	57
1.8	Радиальные зависимости в стационарном $\alpha$ -диске . . . . .	58
1.9	Функция Грина неограниченного диска . . . . .	66
1.10	Функция Грина ограниченного диска . . . . .	70
1.11	Кривые блеска рентгеновских новых типа FRED . . . . .	72
1.12	Момент вязких сил в нестационарном диске . . . . .	78
1.13	Фазовый портрет уравнения для определения автомоделльной функции в решении для нестационарного диска на первой стадии . . . . .	82
1.14	Профиль $F(h)$ в решении Любарского–Шакуры . . . . .	84
1.15	Профиль $F(h)$ в решении Любарского–Шакуры на стадиях формирования языка и квазиастационарной аккреции . . . . .	85
1.16	Иллюстрация распределения момента вязких сил в диске в двойной системе . . . . .	91
1.17	Решение для радиальной зависимости момента вязких сил для двух режимов непрозрачности для диска в двойной системе . . . . .	92
1.18	Болометрическая светимость нестационарного $\alpha$ -диска с постоянным внешним радиусом . . . . .	98
1.19	Сравнение кривых блеска в разных рентгеновских диапазонах . . . . .	99

- 1.20 Моделирование вспышек двух двух рентгеновских новых . 100
- 1.21 Узлы, которые используются для написания  $n$ -го уравнения системы 1.183 в различных схемах. Нами используется неявная схема. . . . . 104
- 1.22 Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в фотометрической полосе В. Кружками отмечены данные наблюдений [108, 109], сплошной линией — модельная кривая блеска. 111
- 1.23 Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в диапазоне 3–6 кэВ. Вертикальными линиями показаны данные спутника Ariel 5 с ошибками [110], сплошной линией — модельная кривая блеска. . . . . 112

## Список таблиц

1.1	Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для томсоновской непрозрачности . . . . .	49
1.2	Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для непрозрачности по Крамерсу . . . . .	50
1.3	Параметры функции Грина для нестационарного диска . .	71
1.4	Безразмерные параметры в уравнениях нестационарной аккреции . . . . .	77
1.5	Значения параметров аналитического решения для ограниченного $\alpha$ -диска . . . . .	93

# Глава 1

## Стандартная модель дисковой аккреции

Лицунова Г. В., Маланчев К. Л.

### 1.1 Введение

Теория аккреционных дисков имеет чрезвычайно широкую область применения в астрофизике — она используется при изучении ярких источников излучения в широком диапазоне спектра в нашей Галактике, центральных ярких областей других активных галактик, протозвезд и зарождающихся планетных систем, релятивистских струй от компактных объектов, самых ярких источников во Вселенной — гамма-всплесков и так далее.

Основу теории стандартной дисковой аккреции составляют работы Шакуры 1972 г. [1] и Шакуры и Сюняева 1973 г. [2]. Среди более ранних работ необходимо отметить статьи Горбацкого [3], Линден–Белла [4], и Прингла и Риса [5]. Развитие теории и описание многообразия процессов, сопровождающих дисковую аккрецию, можно найти в книгах Като и др. [6] и Франка и др. [7], в обзоре Абрамовича и Фраджайла [8]. Галактические диски, диски в протозвездных и протопланетных системах, в тесных двойных звездах рассматриваются в книге Морозова и Хоперкова [9]. Бисикало и др. [10] исследуют газодинамику переноса вещества в тесной двойной системе. Краткий и емкий обзор стандартной теории

дисковой аккреции, а также аспектов, касающихся дисков в карликовых и рентгеновских новых, можно найти в работе Лазоты [11].

В данной главе мы рассмотрим основные свойства стационарных и нестационарных аккреционных дисков в рамках стандартной модели, практически не касаясь эффектов общей теории относительности. Мы выведем основные уравнения, описывающие нерадиальное падение вещества в астрофизических условиях, когда эффекты вязкого трения приводят к нагреву вещества и излучению тепловой энергии, которая наблюдается астрономическими инструментами на огромных расстояниях.

Диски образуются вокруг звезд в результате захвата гравитационным полем звезды вещества, обладающим ненулевым моментом импульса. Это может быть вещество межзвездной среды или горячая плазма, переходящая с соседней звезды. Если вращение вещества происходит преимущественно в одной плоскости, то такая структура называется аккреционным диском. В результате перераспределения момента импульса вещество приближается к центральному телу, а его гравитационная энергия высвобождается. Эта энергия переходит в кинетическую энергию убыстряющегося к центру вращения и в тепловую энергию плазмы. Если тепловая энергия эффективно излучается, диск имеет довольно малую относительную толщину.

В этой главе мы рассмотрим в рамках стандартной модели геометрически тонкие, плоские аккреционные диски. У геометрически тонкого диска полутолщина в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии, много меньше расстояния от данной точки до центра. Если геометрически тонкий диск имеет оптическую толщину много больше единицы в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии, то уравнение энергетического баланса записывается в довольно простом виде. При этом фотоны много раз поглощаются и рассеиваются, прежде чем покинуть диск, и применимо условие локального термодинамического равновесия. Кроме того, в геометрически тонких дисках можно пренебречь радиальной адвекцией (переносом тепла с веществом по радиусу). Условие локально термодинамического равновесия предполагает равенство температуры электронной и ионной компонент плазмы. В стандартных моделях также не рассматривается потеря массы с поверхностей диска, — вещество покидает диск исключительно через его внутреннюю границу. В реальности, точнее, в современной, во многом согласованной картине астрофизических дисков, эти предположения выполняются на значительном расстоянии от центра диска.



Важно отметить, что процесс аккреции идет благодаря вязкости, обусловленной турбулентными движениями вещества в диске. Характерное время изменения радиальной структуры диска называют характерным вязким временем. Вязкое время связано со скоростью радиального движения вещества. В рамках стандартных уравнений аккреционных дисков, о которых речь пойдет в данном разделе, характерное вязкое время  $\tau_{\text{vis}}$  много больше “динамического” времени  $\tau_{\text{dyn}}$ , определяемого скоростью орбитального вращения. Далее, вязкое время также много больше “гидростатического” времени  $\tau_{\text{hyd}}$ , за которое толщина диска меняется из-за изменения давления, и много больше “теплового” времени  $\tau_{\text{th}}$ , то есть характерного времени излучения запасенной тепловой энергии и изменения температуры:

$$\tau_{\text{vis}} \gg \tau_{\text{dyn}}; \quad \tau_{\text{vis}} \gg \tau_{\text{hyd}}; \quad \tau_{\text{vis}} \gg \tau_{\text{th}}.$$

Как у звезды, структура равновесного диска зависит от его светимости. В широком интервале значений темпов аккреции светимость диска пропорциональна темпу, с которым поступает вещество. Существует критическое значение светимости, при приближении к которому эффекты давления излучения начинают играть решающую роль в формировании структуры диска. Это так называемый эддингтоновский предел светимости. Так же, как и для звезд, он определяется из условия равенства силы давления излучения и силы гравитационного притяжения, действующей на протон, в случае сферической симметрии:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4 \pi c G M m_p}{\sigma_T} \approx 1.3 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ эрг/с}. \quad (1.1)$$

Используются следующие обозначения:  $G$  — универсальная гравитационная постоянная,  $M$  — масса центрального тела,  $M_\odot \approx 2 \times 10^{33}$  г — масса Солнца,  $m_p$  — масса протона,  $\sigma_T$  — сечение томсоновского рассеяния. Применяя соотношение для эффективности излучения в процессе аккреции  $L = \eta_{\text{accr}} \dot{M} c^2$ , получаем критический темп аккреции в диске  $\sim 10^{-8} M_\odot/\text{год}$ :

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{4 \pi G M}{c \eta_{\text{accr}} \kappa_T} \approx 1.7 \times 10^{18} \frac{M}{M_\odot} \text{ г/с},$$

где мы подставили КПД аккреции  $\eta_{\text{accr}} = 1/12$  в ньютоновской метрике для диска с внутренней границей на радиусе  $6 G M/c^2$  и удельное сечение томсоновского рассеяния на электронах  $\kappa_T \approx 0.4 \text{ см}^2/\text{г}$ . Часто в

моделях дисков темпы аккреции нормируют на это значение. Оно, однако, является лишь примерной оценкой темпа аккреции, при котором и выше которого конфигурация диска определяется давлением излучения. Приближение тонкого диска перестает выполняться в области, размер которой по радиусу пропорционален темпу аккреции. В этой области может происходить истечение вещества с поверхности диска.

Различные неустойчивости могут возникать в аккреционных дисках и при темпах аккреции меньше критического. Например, при температурах и плотностях, соответствующих условиям рекомбинации ионов плазмы, развивается ионизационно-тепловая неустойчивость, в результате которой на масштабе теплового времени происходит перестройка вертикальной структуры диска [12]. Эта неустойчивость приводит, в частности, к вспышкам в карликовых новых. Вблизи центра диска, если давление излучения превосходит давление вещества, развиваются вязкая (вековая) и тепловая неустойчивости [13, 14, 15]. Тем не менее, есть значительный диапазон темпов аккреции, при которых структуру аккреционных дисков можно рассматривать в квазистационарном приближении.

## 1.2 Вывод уравнений дисковой аккреции

При рассмотрении геометрически тонких дисков, удобно работать в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ . Предполагаем, что в аккреционных дисках сохраняется аксиальная симметрия. Следствием этого в уравнениях будет обнуление производных по  $\varphi$ . Для толстых дисков или для одновременного исследования структуры вещества, истекающего с поверхности диска, используют сферическую систему координат.

### Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах при аксиальной симметрии имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.2)$$

### Уравнения движения

Уравнения движения в цилиндрических координатах в случае аксиальной симметрии записываются как:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + N_r, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = N_\varphi, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + N_z, \quad (1.5)$$

где  $\Phi$  — гравитационный потенциал,  $P$  — давление,  $N_r$ ,  $N_\varphi$ ,  $N_z$  — компоненты вязкой силы  $\mathbf{N}$ . Запишем компоненты  $\mathbf{N}$  в случае аксиальной симметрии:

$$\rho N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_{rr}) - \frac{w_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial w_{rz}}{\partial z}, \quad (1.6)$$

$$\rho N_\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_{\varphi r}) + \frac{\partial w_{\varphi z}}{\partial z}, \quad (1.7)$$

$$\rho N_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_{zr}) + \frac{\partial w_{zz}}{\partial z}, \quad (1.8)$$

где  $w_{ik}$  — компоненты тензора вязких напряжений. Выпишем эти компоненты:

$$w_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.9)$$

$$w_{r\varphi} = w_{\varphi r} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right], \quad (1.10)$$

$$w_{rz} = w_{zr} = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \quad (1.11)$$

$$w_{\varphi\varphi} = 2\eta \frac{v_r}{r} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

$$w_{\varphi z} = w_{z\varphi} = \eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \quad (1.13)$$

$$w_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.15)$$

Здесь  $\eta$  — динамический коэффициент сдвиговой вязкости, обусловленной относительным движением слоев в веществе,  $\zeta$  — коэффициент объемной вязкости<sup>1</sup>. В дальнейшем мы не будем учитывать объемную вязкость.

Для тонкого аккреционного диска из всех компонент тензора вязких напряжений только  $w_{r\varphi}$  является существенной. В результате имеем:

$$\rho N_\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_{r\varphi}), \quad (1.16)$$

$$w_{r\varphi} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\varphi}{r} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad (1.17)$$

где  $\omega = v_\varphi/r$  — угловая скорость вращения вещества в диске.

Будем рассматривать тонкие стационарные диски, для которых в уравнениях движения (1.3–1.5) частные производные по времени обращаются в ноль. Для таких дисков основными по величине членами уравнения (1.3) являются  $v_\varphi^2/r$  и градиент гравитационного потенциала. Для ньютоновского гравитационного потенциала  $\Phi = -GM/r$ , считая, что самогравитацией диска можно пренебречь, получаем кеплеровский закон:

$$\omega_K = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (1.18)$$

При этом силы давления и трения в тонком диске являются величинами следующего порядка малости.

В направлении перпендикулярном плоскости диска выполняется гидростатическое равновесие, при котором вертикальная компонента силы тяжести уравновешена вертикальным градиентом давления. Из уравнения (1.5) имеем:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{GM}{r^3} z. \quad (1.19)$$

### Выделение энергии

Энергия, диссипирующая в единице объема в единицу времени, равна [16]:

$$\varepsilon = w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

---

<sup>1</sup>В книге Ландау и Лившица [16]  $\zeta$  названа “второй вязкостью”. В англоязычной литературе второй вязкостью преимущественно называется величина  $\lambda$ , которая связана с объемной вязкостью по формуле  $\zeta = \lambda + 2\eta/3$ .

В цилиндрических координатах, в осесимметричном течении:

$$\varepsilon = \eta \left[ 4 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial v_r r}{r \partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2. \quad (1.20)$$

В тонких аккреционных дисках самая большая компонента скорости — скорость углового вращения  $v_\varphi$ . Учтем, что течение осесимметричное и скорости не меняются с  $z$ . Поэтому доминирующая составляющая в диссипации энергии имеет вид

$$\varepsilon = w_{r\varphi} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \eta \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 = \eta r^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2. \quad (1.21)$$

### 1.3 Вязкость в аккреционных дисках

Ключевая гипотеза моделей аккреционных дисков заключается в турбулентной природе их вязкости [1, 2, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Значения коэффициентов молекулярной вязкости, полученные из исследования свойств жидкостей и газов не могут объяснить наблюдаемые свойства астрофизических дисков. Необходимый темп переноса массы к центру диска и сопутствующий ему перенос момента импульса наружу могут быть объяснены только при больших значениях вязкости вещества диска, на много порядков превышающих молекулярную вязкость. Турбулентное движение вещества может приводить к значительным напряжениям  $w_{r\varphi}$  в диске. Более того, число Рейнольдса в астрофизических дисках очень велико, и это само по себе может служить основанием для развития сильной турбулентности вне зависимости от конкретных механизмов ее возникновения.

Дифференциальное вращение кеплеровских газовых дисков считается основным источником их турбулизации. Как показано в главе ??, в тонких ламинарных кеплеровских дисках имеет место вязко-конвективная неустойчивость, в результате которой в дисках может возникать турбулентность.

Перенос момента импульса мелкомасштабными магнитными полями в аккреционных дисках был предложен в работе [2]. В конце 1950-х — начале 1960-х годов Е. П. Велихов [24] и С. Чандрасекар [25] открыли

МГД-неустойчивость в сдвиговых течениях с угловой скоростью, падающей наружу при наличии затравочного полоидального магнитного поля. Важность этой неустойчивости для аккреционного диска была показана в расчетах Бальбуса и Хаули (см. обзоры [20, 26]). Дискковая аккреция с магнитными полями рассматривалась во многих работах (см., например, [27, 28, 29, 30, 31]).

На современном этапе развития теории нет единого мнения по поводу вида записи вязких напряжений в вязком потоке. Большинство исследователей используют концепцию  $\alpha$ -вязкости [1, 2].

В § 1.2 полагалось, что выведенные уравнения описывают средние крупномасштабные движения газа. Турбулентность появляется в результате перехода части энергии крупномасштабных движений в энергию случайных возмущений меньших масштабов. Такие хаотические движения среды в общем случае имеют очень сложную структуру, и их индивидуальное описание не представляется возможным. Численное решение этих нелинейных уравнений не может быть достигнуто в настоящее время ввиду непомерных вычислительных затрат, необходимых для такой задачи. Аналитическое решение неограниченной задачи с гладкими начальными условиями также не получено; решение уравнения Навье–Стокса является одной из семи задач тысячелетия, оглашенных в 2000 г. Математическим институтом Клэя [32]. В прикладных задачах используют, в основном, методы, основанные на различных приближениях, например метод осреднения по Рейнольдсу, метод крупных вихрей [33].

### 1.3.1 Уравнения Рейнольдса. Тензор Рейнольдса

Рейнольдс предложил разложить гидродинамические поля реальных сред на две составляющие — усредненные поля и пульсационные (хаотические) поля, и после этого провести осреднение уравнений. Например, для компоненты скорости положим  $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ , для давления  $p = \bar{p} + p'$  и т.д. Средние поля являются всегда гладкими и медленно меняющимися. Пульсационные поля являются хаотическими и в пространстве и во времени. Отметим, что в остальных разделах мы будем использовать обозначение  $\rho$  без черты сверху для локальной осредненной плотности турбулизованного вещества диска.

Осреднение уравнений Навье–Стокса при соблюдении правил, предложенных Рейнольдсом, приводит к уравнениям движения для осредненных величин — уравнениям Рейнольдса. При этом метод осредне-

ния не имеет решающего значения, это может быть временное усреднение, пространственное, теоретико-вероятностное осреднение по статистическому ансамблю с привлечением гипотезы эргодичности<sup>2</sup>. Временные и пространственные средние величины сходятся к теоретико-вероятностным средним значениям, если случайный процесс стационарный и пространственно-однородный. Второе условие всегда является математической идеализацией. На практике приходится говорить лишь об однородности в некоторой ограниченной области пространства и времени. Общим условием сходимости усредняемых по времени или пространству значений к теоретико-вероятностным средним значениям является условие эргодичности.

Выпишем уравнение Навье–Стокса в тензорных величинах:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = f_i - \frac{\partial (P \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.22)$$

где  $f_i$  — компоненты внешней силы, действующей на единичный объем вещества.

Для несжимаемой жидкости ( $\rho = const$ ) мы воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial (v_i v_k)}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k},$$

в частности, заменим второе слагаемое слева в (1.22) на  $\partial(v_i v_k)/\partial x_k$ .

Проведем осреднение по правилам Рейнольдса ([34], Глава 2), часть которых выглядит следующим образом:

$$\overline{f^r} = 0, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}, \quad \overline{v_i \cdot v_k} = \overline{v_i} \cdot \overline{v_k} + \overline{v'_i \cdot v'_k}.$$

Переноса массы в среднем движении за счет турбулентности не происходит:  $\overline{\rho v'_i} = 0$ .

В осредненном уравнении Рейнольдса, из-за нелинейности исходного уравнения, обнаруживаем появление дополнительного члена, зависяще-

---

<sup>2</sup>При вероятностном осреднении рассматривается совокупность гидродинамических течений. Подразумевается, что гидродинамические поля турбулентного течения (физические величины как функции времени и координаты, описывающие движение среды в некоторой области пространства) представляют собой случайные поля в смысле, принятом в теории вероятностей. Каждая конкретная реализация такого поля характеризуется своей вероятностной мерой [34].

го от пульсационного поля скорости (со штрихом):

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i v_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_k} \right) = \bar{f}_i - \frac{\partial (\bar{P} \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{w_{ik}}}{\partial x_k}.$$

Чтобы выяснить смысл последнего члена, рассмотрим осредненный по времени поток импульса:

$$\overline{\Pi_{ik}} = \bar{P} \delta_{ik} + \rho \overline{v_i v_k} - (\overline{w_{ik}} - \rho \overline{v'_i v'_k}). \quad (1.23)$$

Первые два слагаемые справа отвечают за обратимый (механический) перенос импульса средним движением. Мы видим, что для турбулентного движения роль тензора вязких напряжений играет сумма вязкого тензора, зависящего от свойств среды и члена, связанного с хаотическими течениями. Таким образом, турбулентные движения приводят к обмену импульсом между объемами жидкости, и влияние турбулентного перемешивания аналогично вязкости. Следующая запись уравнений Рейнольдса подчеркивает эту трактовку:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = \frac{\bar{f}_i}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{P} \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \eta \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \right). \quad (1.24)$$

Здесь использовано выражение для тензора вязких напряжений в несжимаемой жидкости  $w_{ik} = \eta (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i)$  (см., например, главу 2 в [16]) и применено условие несжимаемости жидкости.

Величина

$$R_{ik} = -\rho \overline{u'_i u'_k} \quad (1.25)$$

называется тензором турбулентной вязкости Рейнольдса. Вид этого члена не известен и для решения уравнений Рейнольдса приходится делать предположения, в той или иной степени эмпирически обоснованные. Главная проблема феноменологической теории турбулентности состоит в нахождении неизвестных турбулентных потоков (потока импульса для приведенных выше уравнений) через осредненные параметры состояния среды — это так называемая проблема замыкания.

**Сжимаемая жидкость** Для случая сжимаемой жидкости вместо осреднения Рейнольдса используется весовое осреднение, предложенное



Фавром [35]. Средневзвешенная скорость равна  $\tilde{v}_i = \overline{\rho v_i} / \bar{\rho}$ , где черта над величиной означает осреднение Рейнольдса (временное осреднение). Скорость потока тогда представляется как сумма взвешенно-осредненной и пульсационной (по Фавру) скоростей:  $v_i = \tilde{v}_i + v_i''$ . Теперь  $\overline{v_i''} \neq 0$  (усреднение по ансамблю) при  $\tilde{v}_i'' = 0$  (средневзвешенное усреднение, усреднение по ансамблю), но по-прежнему турбулентные движения не приводят к переносу массы,  $\overline{\rho v_i''} = 0$  (см., например, [23], глава 3).

После такого представления гидродинамических функций и осреднения по времени уравнения Навье–Стокса при  $\rho \neq const$  получается уравнение движения, которое также можно записать в компактной форме, аналогичной (1.24), но дополнительный член, который по смыслу соответствует турбулентной вязкости, оказывается более сложного вида:

$$R_{ik}^* = -\overline{\rho v_i'' v_k''} + \eta \left( \frac{\partial \overline{v_i''}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k''}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \overline{v_k''}}{\partial x_k} \right). \quad (1.26)$$

При этом игнорируются флуктуации коэффициента молекулярной вязкости  $\eta$ . Таким образом, если происходят флуктуации плотности в среде, то тензор вязкости не разделяется на две составляющие — зависящую только от свойств среды (вязкости  $\eta$  и осредненной  $\tilde{v}_i$  ламинарного течения) и зависящую только от турбулентной динамики потока (члены с пульсационной скоростью). На практике ожидается, однако, что в последнем выражении второе слагаемое, включающее молекулярную вязкость, окажется много меньше первого [36].

### 1.3.2 Проблема замыкания

Вид тензора Рейнольдса не может быть найден из гидродинамических уравнений. Невозможность получить замкнутую систему уравнений для конечного числа моментов гидродинамических полей является следствием нелинейности уравнений гидродинамики. В случае весового осреднения, задача еще больше усложняется ([23], глава 3).

Необходимость решения практических задач привела к тому, что было проведено большое число экспериментов с турбулентными течениями. На базе этих исследований строились полуэмпирические теории турбулентности, которые систематизировали полученные результаты.

Важные шаги в этом направлении были сделаны Буссинеском (конец XIX века), Тэйлором, Прандтлем и Карманом в 20-е и 30-е годы XX

века. Полуэмпирические теории турбулентности строятся на основе аналогии между турбулентностью и молекулярной вязкостью. Применение самых простых теорий позволяет замкнуть уже самые первые уравнения для гидродинамических полей — для низших моментов (уравнения Рейнольдса). В результате уравнения Рейнольдса могут решаться при выражении  $R_{ik}$  через некие крупномасштабные характеристики потока. Эти характеристики описывают передачу тепла и импульса через турбулентную среду. Крупномасштабные характеристики турбулентности существенно зависят от геометрии границ потока и характера внешних воздействий, которые весьма различны в разных ситуациях. Поэтому, с одной стороны, говорят о неоднозначности полуэмпирических замыкающих соотношений. С другой стороны, использование более сложных замыкающих соотношений не приводит ни к более общим решениям, ни к уточнению решений. Таким образом, очень часто предпочтение отдается простым моделям, и одновременно решается задача о границах применимости конкретных полуэмпирических теорий турбулентности (см. [23], § 1.1.6).

### 1.3.3 Коэффициент турбулентной вязкости

Уравнения Рейнольдса могут быть решены только при дополнении их замыкающими соотношениями, которые связывают упомянутые величины и усредненные характеристики гидродинамического потока (давление, плотность, температура, средняя скорость). Так строятся полуэмпирические модели турбулентности. Большинство из них основаны на градиентной гипотезе Буссинеска (1897) о том, что существует линейная связь между турбулентным тензором вязкости и тензором сдвига, который является линейной комбинацией членов  $\partial \bar{v}_j / \partial x_i$  при наличии некоторых локальных коэффициентов пропорциональности (коэффициентов турбулентного переноса). Однако необходимо сделать конкретные предположения об этих коэффициентах.

Рассмотрим малую площадку внутри турбулентного потока (Рис. 1.1). Считаем ее плоской и положим, что осредненное движение направлено вдоль этой площадки (вдоль оси  $x$ ). Пусть площадка лежит в плоскости  $z = 0$ . Сила трения, приходящаяся на единицу площади, направленная вдоль оси  $x$ , будет равна:

$$\overline{w_{xz}} - \rho \overline{v'_x v'_z} = \rho \nu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} - \rho \overline{v'_x v'_z}.$$

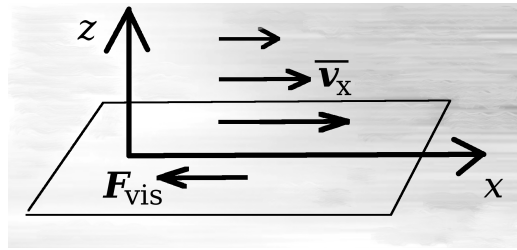


Рис. 1.1: Координаты в плоском потоке.

Согласно так называемой градиентной гипотезе Буссинеска между вязкими и турбулентными потоками импульса имеется аналогия и можно положить

$$-\rho \overline{v'_x v'_z} = \rho \nu_t \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial z}, \quad (1.27)$$

вводя коэффициент пропорциональности  $\nu_t$ . Такой подход, если известен кинематический коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$ , заменяющий обычный коэффициент молекулярной вязкости, позволяет решать уравнения Рейнольдса обычными методами. Коэффициент турбулентной вязкости не может быть выведен из микроскопических соображений.

Градиентная модель хорошо работает для квазистационарных течений. Предполагается, что в структуре развитой турбулентности установилось локальное равновесие, при котором характеристики турбулентности в каждой точке потока целиком определяются локальными характеристиками поля осредненного течения вблизи этой точки, а также локальными осредненными параметрами состояния самой среды.

Обычно  $\nu_t$  значительно превосходит  $\nu$  по величине. Коэффициент турбулентной вязкости, в отличие от коэффициента молекулярной вязкости, описывает не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения. Его величина зависит от способа усреднения по ансамблю аналогичных течений. Полуэмпирическая модель турбулентности может быть построена, если  $\nu_t$  оценивается в ходе экспериментов. Например, известно, что для случая движения турбулентного потока в плоском канале  $\nu_t$  не может быть постоянной величиной, так как опытным путем устанавливается, что вблизи стенок  $\nu_t \rightarrow 0$ . А в турбулентном пространственно-неограниченном потоке зачистую вполне обоснованно положить, что  $\nu_t = const$  (см. § 5.8 в [34]).

Таким образом, мы перешли от неизвестного тензора Рейнольдса к

коэффициенту турбулентной вязкости, который тоже неизвестен. Выбор его представляет собой отдельную задачу, для решения которой, в свою очередь, были предложены другие полуэмпирические теории. Для этого, в частности, используется понятие пути перемешивания. Это понятие играет важную роль в теории турбулентной вязкости аккреционных дисков.

### 1.3.4 Путь перемешивания

Введенное Прандтлем (1925) в теорию турбулентности понятие пути перемешивания позволяет не только просто выразить через длину пути перемешивания коэффициенты турбулентного обмена (в частности, коэффициент турбулентной вязкости), но и получить для некоторых частных случаев определяющие соотношения для турбулентных потоков. Путь перемешивания — это расстояние, которое проходит элементарный объем газа в турбулизованном потоке, прежде чем этот объем окончательно перемешивается с окружающей средой. Это расстояние в известном смысле аналогично длине свободного пробега в кинетической теории газов.

Турбулентные напряжения являются результатом переноса импульса за счет пульсаций турбулентной скорости. Гипотеза Прандтля состоит в том, что вихри, смещающиеся по координате  $z$  на длину “пути перемешивания”  $\xi'_z$ , сохраняют тот импульс, каким они обладали на исходном уровне. Аналогично картине турбулентной диффузии примеси, на любой высоте  $\xi'_z$  пульсация скорости  $v'_x$  может быть представлена как изменение, произошедшее из-за притока малой струйки вещества с другого уровня с импульсом  $\bar{v}_x(z)$ . Запишем таким образом соотношение Прандтля для переноса импульса:

$$v'_x = -\xi'_z \overline{\partial v_x} / \partial z . \quad (1.28)$$

В случае плоского сдвигового потока получаем для компоненты тензора Рейнольдса(1.25):

$$R_{xz} \equiv -\rho \overline{v'_x v'_z} = \rho \overline{\xi'_z v'_z} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} . \quad (1.29)$$

Если определить кинематический коэффициент турбулентной вязкости

$$\nu_t = \overline{\xi'_z v'_z} , \quad (1.30)$$

то формула (1.29) терминологически согласуется с градиентной гипотезой (см. выражение (1.27)). Формула (1.30) аналогична формуле для коэффициента молекулярной вязкости:  $\nu = l_m v_m$ , где  $l_m$  — длина свободного пробега молекул,  $v_m$  — скорость их теплового движения. “Мера обмена” в турбулентном потоке  $\nu_t$  также является произведением расстояния и скорости, с которой происходит турбулентный обмен, — скорости перемешивания. Величина  $\xi'_z$  по сути является случайной (пульсационной) величиной.

Для практического применения формулы (1.29) необходимо также оценить скорость перемешивания, что и делает Прандтль [37]. В результате перемешивания сама скорость перемешивания должна снижаться по мере выравнивания условий (скоростей) в среде. Отсюда следует предположение, что скорость перемешивания должна быть пропорциональна градиенту скоростей среднего движения между разными слоями  $\partial \overline{v_x} / \partial z$ . Это рассуждение одновременно означает, что усредненные пульсации скоростей по разным направлениям близки по значению, то есть  $v'_z \sim v'_x$  [34]. Поэтому используем (1.28), подставляя в (1.29), и получим:

$$R_{xz} = \rho \overline{(\xi'_z)^2} \left| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} \right| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z},$$

где модуль стоит для того, чтобы знак тензора турбулентной вязкости был тот же, что у  $\partial \overline{v_x} / \partial z$ . Это соответствует тому факту, что импульс передается от быстрее движущихся слоев к более медленным слоям. Тогда для кинематического коэффициента турбулентной вязкости получится формула Прандтля [37]:

$$\nu_t = \alpha^* L^2 \left| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} \right|, \quad (1.31)$$

где  $\alpha^*$  — безразмерная величина порядка 1. Сам по себе локальный путь перемешивания  $\xi'_z$  является слишком неопределенной величиной, которую невозможно измерить. Здесь длина  $L$ , или путь перемешивания, уже не случайная величина. По порядку величины она равна  $\sqrt{\overline{(\xi'_z)^2}}$  и характеризует масштаб турбулентности. Теперь для нахождения решения нужно установить зависимость  $L$  от координат, например, эмпирически.

Выражение (1.31) может быть получено также из соображений размерности. Для этого учитывается принцип локального подобия турбулентного переноса (§ 3.3 в [23]), — коэффициенты турбулентного переноса в каждой точке зависят только от свойств среды в этой точке, от

локального значения масштаба турбулентности  $L$  и от некоторых характеристик осредненного течения. Иными словами,  $\nu_t$  является функцией величин  $\nu$ ,  $L$ ,  $\partial \overline{v_x} / \partial z$ . Масштаб  $L$  характеризует геометрию турбулентного течения или характерный размер. Вдали от твердой поверхности можно исключить  $\nu$  из списка параметров, и по соображениям размерности следует формула Прандтля (1.31).

Постоянный множитель  $\alpha^*$  устанавливается для каждого конкретного типа движения на основании экспериментальных данных.

### 1.3.5 Параметр турбулентной вязкости $\alpha$

Рассмотрим аккреционный диск, в котором вращение происходит по круговым орбитам и скорости вращения лежат в плоскостях, параллельных плоскости симметрии диска. Расположив воображаемую стенку перпендикулярно к радиусу в данной точке на расстоянии  $r_*$  от центра, найдем силу трения, приходящуюся на единицу ее площади.

Осредненная скорость вещества в диске с большой точностью тангенциальна этому радиусу, так как скорость вращения доминирует над остальными компонентами. Пусть воображаемая стенка вращается вокруг центра с осредненной скоростью потока. Сила трения направлена тангенциально, и равна плотности потока  $\varphi$ -компоненты импульса в радиальном направлении. Если предположить, как было указано в § 1.3.1 после формулы (1.26), что первый член в тензоре турбулентной вязкости, определяемый только динамикой течения, доминирует над вторым членом, в которой входит коэффициент молекулярной вязкости  $\eta$ , то  $r\varphi$ -компонента напряжения трения на стенке в данном случае будет равна

$$\overline{(w_{r\varphi} - \rho v_r'' v_\varphi'')}_{r=r_*} = \overline{(\rho \nu r \frac{d\omega}{dr} - \rho v_r'' v_\varphi'')}_{r=r_*},$$

где использовано выражение для компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат (см. главу 2 в книге Ландау и Лившица [16]).

Как это принято, будем обозначать через  $w_{r\varphi}^t$  величину, противоположную по знаку компоненте тензора вязких напряжений в диске в цилиндрической системе координат<sup>3</sup>. Следуя градиентной гипотезе (см.

<sup>3</sup>При такой договоренности  $w_{r\varphi}$  положительна для аккреционных дисков. В англоязычной литературе часто используется символ  $t_{r\varphi}$ .

§ 1.3.3 и выражение (1.27)), можно записать:

$$w_{r\varphi}^t \equiv \overline{\rho v_r'' v_\varphi''} = -\bar{\rho} \nu_t r \frac{d\omega}{dr}, \quad (1.32)$$

где  $\nu_t$  — кинематический коэффициент турбулентной вязкости [см<sup>2</sup>/с]. Для кеплеровского диска из (1.32) получаем:

$$w_{r\varphi}^t = \frac{3}{2} \omega_K \nu_t \bar{\rho}. \quad (1.33)$$

Согласно следствию гипотезы Прандтля (1.30),  $\nu_t = \overline{v_t l_t}$ , где  $v_t$  и  $l_t$  — скорость и длина турбулентного перемешивания, которые в турбулентном потоке принимают случайные значения<sup>4</sup>. Применяя в диске соотношение Прандтля для переноса по радиусу турбулентной скорости

$$v_t = l_t r \left| \frac{d\omega}{dr} \right|$$

(сравним с (1.28)), получаем, подставляя в (1.32), что

$$w_{r\varphi}^t = \bar{\rho} \overline{v_t^2} \equiv m_t^2 \bar{\rho} v_s^2,$$

где осредненная квадратичная турбулентная скорость (пульсационная компонента скорости вещества в диске)  $\overline{v_t^2}$  выражена через скорость звука  $v_s$  и число Маха  $m_t^2 = \overline{v_t^2}/v_s^2$ .

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$w_{r\varphi} = \alpha P, \quad (1.34)$$

где безразмерная величина  $\alpha$  называется турбулентным параметром,  $P$  — полное давление (равное сумме газового и лучистого).

Модели дисков, в которых источником вязкости принимается турбулентность и используется связь (1.34), называются  $\alpha$ -дисками. В самых простых моделях этот коэффициент полагается фиксированным для всего аккреционного диска. Его величина может быть найдена из сопоставления с наблюдениями транзиентных явлений, которые являются проявлениями вязкой эволюции дисков при нестационарной аккреции на космические объекты.

<sup>4</sup>Они аналогичны величинам  $v_x'$  и  $\xi_z'$ , рассмотренным в § 1.3.4.

Приравняем (1.33) величине  $\alpha \bar{\rho} v_s^2$  и получим для кеплеровского диска связь между безразмерным турбулентным параметром и кинематическим коэффициентом вязкости:

$$\nu_t = \frac{2}{3} \alpha v_s z_{\text{hyd}}, \quad (1.35)$$

где введена “гидростатическая полутолщина” диска, которая получается путем приближенного интегрирования (1.19):

$$z_{\text{hyd}} \equiv \sqrt{\frac{p}{\rho} \frac{1}{\omega_K^2}} = \frac{v_s}{\omega_K}.$$

С учетом следствия гипотезы Прандтля (1.30),  $\nu_t = \overline{v_t l_t}$ , мы можем записать:

$$\alpha = \frac{\overline{v_t l_t}}{\frac{2}{3} v_s z_{\text{hyd}}}.$$

Из общих соображений становится ясно, что параметр  $\alpha$  — величина, не превосходящая единицу. Действительно, если турбулентные движения имеют скорость больше звуковой, ударные волны быстро гасят такие движения. Неравенство же  $l_t > z_{\text{hyd}}$  означало бы, что турбулентность носит анизотропный характер, так как поперечная толщина диска ограничена величиной  $\sim z_{\text{hyd}}$ .

Использование параметра  $\alpha$  оправдывает себя в ситуациях, когда он может считаться примерно постоянной величиной. Как показано в последние десятилетия, такое приближение хорошо описывает многообразие наблюдаемых явлений в источниках с дисковой аккрецией. Численное моделирование вспышек в карликовых новых и рентгеновских транзиентах демонстрирует, что для определенных диапазонов физических условий в этих астрофизических дисках параметр  $\alpha$  может считаться константой. Были получены его типичные значения:

$$10^{-2} - 1 \text{ [38, 39].}$$

Отметим, что встречаются астрофизические условия, когда нельзя ожидать выполнения соотношения  $w_{r\varphi} = \alpha P$  с постоянным  $\alpha$ , например, в зонах с частичной ионизацией. Магнитные поля и излучение могут влиять на развитие дисковой турбулентности и на параметр турбулентной вязкости.



## 1.4 Тонкие диски

### 1.4.1 Уравнения радиальной структуры

Выпишем уравнения дисковой аккреции для геометрически тонких  $\alpha$ -дисков. Мы будем пренебрегать зависимостями физических параметров в диске от  $z$ , производя усреднение (интегрирование) по вертикали. Будем рассматривать диски без радиальной адвекции (переноса тепла с веществом по радиусу) и без потери массы с поверхностей диска. В таких дисках угловая скорость вращения вещества диска на каждом радиусе  $r$  приблизительно равна угловой скорости вращения свободной частицы. Другими словами,  $v_r \ll v_\varphi$ .

Параметрами, определяющими структуру геометрически тонкого диска, являются масса гравитирующего центра  $M$ , внутренний радиус аккреционного диска  $r_{\text{in}}$  и темп аккреции  $\dot{M}$ .

**Уравнение сохранения массы** Введем поверхностную плотность

$$\Sigma_0(t, r) = \int_{-z_0}^{+z_0} \rho(t, r, z) dz, \quad (1.36)$$

где  $z_0$  — полутолщина диска на радиусе  $r$ . Как мы договорились ранее, для тонких дисков скорости не меняются по  $z$ . Интегрируя (1.2) по высоте, получаем:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_0 v_r r). \quad (1.37)$$

Произведение в скобках в правой части этого выражения, умноженное на  $2\pi$ , по смыслу равно радиальному потоку вещества в диске [г/с] через цилиндрическую поверхность радиуса  $r$ .

**$r$ -компонента уравнения переноса момента импульса** Для тонкого стационарного диска основными по величине в этом уравнении являются члены

$$\frac{v_\varphi}{r^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

что для ньютоновского потенциала равносильно закону Кеплера:

$$\omega_K = \frac{\sqrt{GM}}{r^{3/2}}.$$

$\varphi$ -компонента уравнения переноса момента импульса Проинтегрируем по вертикали  $\varphi$ -компоненту уравнения движения (1.4), умноженную на  $\rho r^2$ :

$$\Sigma_0 v_r r \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}(W_{r\varphi} r^2), \quad (1.38)$$

где

$$W_{r\varphi}(t, r) = \int_{-z_0}^{+z_0} w_{r\varphi}^t(t, r, z) dz. \quad (1.39)$$

### 1.4.2 Решение при постоянном темпе аккреции

Из уравнения неразрывности (1.37) в стационарном случае следует, что

$$\Sigma_0 v_r r = const.$$

Определим темп аккреции как массу вещества, пересекающего поверхность цилиндра с радиусом  $r$  за единицу времени:

$$\dot{M} \equiv -2\pi r v_r \Sigma_0. \quad (1.40)$$

Знак минус введен, чтобы в будущем оперировать положительной величиной  $\dot{M}$  и скомпенсировать тот факт, что в аккреционном диске при движении массы к центру  $v_r < 0$ .

Для постоянного темпа аккреции уравнение сохранения момента импульса (1.38) легко интегрируется:

$$\dot{M} \omega r^2 - 2\pi W_{r\varphi} r^2 = const \quad (1.41)$$

— это закон сохранения момента импульса стационарного диска. Константа должна быть определена из граничных условий на внутреннем радиусе диска:

$$\dot{M} (h - h_{in}) = F - F_{in},$$

где  $F \equiv 2\pi W_{r\varphi} r^2$  (положительная величина по нашей договоренности, равна моменту вязких сил между соседними кольцами диска), удельный момент импульса  $h = \omega r^2$ , а нижний индекс означает величины на внутреннем краю диска.

Закон сохранения момента импульса можно записать в виде:

$$W_{r\varphi} = \frac{\dot{M} \omega}{2\pi} f(r) \quad \text{или} \quad F = \dot{M} h f(r), \quad (1.42)$$

где функция  $f(r) = 1 - h_{\text{in}}/h + F_{\text{in}}/(\dot{M} h)$  содержит информацию о внутренних граничных условиях на тензор вязких напряжений (вид  $f(r)$  для  $\dot{M}(r) \neq \text{const}$  см. в разд. 1.5.3). Например, в случае черной дыры принимается условие равенства нулю тензора вязких напряжений, так как внутренний радиус диска ограничен радиусом последней устойчивой орбиты, с которой вещество свободно падает на черную дыру. Тогда вдали от внутреннего радиуса  $f(r) \approx 1$ . При аккреции на замагниченную звезду тензор напряжений на внутреннем краю диска будет зависеть от величины магнитного поля, и соответственно меняется его радиальное распределение. При достаточно сильном магнитном поле центрального объекта аккреция вещества может прекращаться на внутреннем радиусе диска. Такие диски называются дисками-накопителями [40]. В диске-накопителе  $F$  постоянна по радиусу вблизи внутренней границы, а ее поведение на больших радиусах зависит также от условий на внешней границе.

### 1.4.3 Радиальная скорость вещества в тонком диске

Оценим радиальную компоненту скорости вещества в диске в стационарном режиме из закона сохранения момента импульса для  $\varphi$ -компоненты, воспользовавшись его следствием (1.42) в приближении  $f(r) \sim 1$ , справедливом вдали от центра, и определением темпа аккреции (1.40):

$$|v_r| = \frac{\dot{M}}{2\pi r \Sigma_0} = \frac{W_{r\varphi}}{\omega r \Sigma_0}.$$

Очевидно, что скорость, с которой вещество приближается к тяготеющему телу, зависит от величины вязкости. Воспользуемся формулой (1.33) и получим:

$$|v_r| = \frac{3}{2} \frac{\nu_t}{r}, \quad (1.43)$$

где приближенно положено  $W_{r\varphi} \approx 2z_0 w_{r\varphi}$  и  $\Sigma_0 \approx 2z_0 \rho$  (ср. (1.36) и (1.39)).

Характерное время передвижения вещества по радиальной координате к центру

$$\tau_{\text{vis}} \sim \frac{r}{|v_r|} = \frac{2}{3} \frac{r^2}{\nu_t}.$$

Делая предположение о  $\alpha$ -вязкости в диске и используя связь (1.35) между  $\nu_t$  и  $\alpha$ , полученные формулы перепишем в виде:

$$|v_r| = \alpha v_s \frac{z_0}{r} = \alpha v_\varphi \left( \frac{z_0}{r} \right)^2, \quad (1.44)$$

$$\tau_{\text{vis}} = \frac{1}{\alpha \omega_K} \left( \frac{z_0}{r} \right)^{-2}. \quad (1.45)$$

В геометрически тонком диске вязкое время много больше характерного динамического времени

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \frac{r}{v_\varphi} \sim \frac{1}{\omega_K}. \quad (1.46)$$

#### 1.4.4 Аккреция на черную дыру

В главе ??, посвященной релятивистским стандартным дискам, будет изложена теория, начала которой были заложены работой Новикова и Торна [41]. Для ознакомления с астрофизическими аспектами теории также рекомендуем книги [42, 43]. Здесь мы опишем только основные особенности поведения диска вблизи черной дыры.

Вблизи черной дыры искривление пространства-времени играет решающую роль в строении аккреционного диска. Нарушается приближение тонкого аккреционного диска, согласно которому вещество вращается по приблизительно круговым орбитам. Поток вещества на черную дыру ускоряется, становится существенно сверхзвуковым и идет в режиме свободного падения.

Свободное падение вещества проходит с сохранением момента импульса. При этом нет потока вязкого тензора наружу, что выражается равенством его нулю на внутренней границе диска:  $F_{\text{in}} = W_{r\varphi} r_{\text{in}}^2 = 0$ . Это условие подтверждается численными одномерными расчетами гидродинамических уравнений в пост-ньютоновском потенциале [44]. Оказывается, условие равенства нулю тензора вязких напряжений наступает вблизи радиуса последней устойчивой орбиты (ISCO<sup>5</sup>).

Для невращающихся черных дыр радиус последней круговой устойчивой орбиты  $r_{\text{ISCO}} = 3 R_g$ , где шварцшильдовский радиус  $R_g$  — радиус горизонта невращающейся черной дыры, —

$$R_g = 2 G M / c^2.$$

---

<sup>5</sup>innermost stable circular orbit (англ.)

Радиус  $r_{\text{ISCO}}$  для вращающейся черной дыры находится в метрике пространства–времени Керра и дан точной формулой (??) в § ??.

На радиусах меньше  $3 R_g$  нет энерговыделения, происходящего из-за вязкости. Отметим, что в этих областях излучение может генерироваться в результате процессов, в которых участвуют плазма и магнитные поля.

Таким образом, при аккреции на шварцшильдовскую черную дыру граничное условие на внутреннем радиусе записывается как

$$W_{r\varphi}(r = 3 R_g) = 0.$$

Используем уравнение (1.41) для  $\dot{M} = \text{const}$  в виде

$$\dot{M}(\omega_{\text{in}} - \omega) = 2\pi W_{r\varphi},$$

или, для момента вязких сил,

$$F = \dot{M}(h - h_{\text{in}}), \quad (1.47)$$

где  $h_{\text{in}}$  — удельный момент импульса вещества на последней устойчивой орбите у черной дыры.

Для стационарного внешне неограниченного диска, при равенстве нулю тензора вязких напряжений на внутренней границе для функции, определенной в (1.42), имеем:

$$f(r) = 1 - h_{\text{in}}/h(r) + F_{\text{in}}/(\dot{M} h) = 1 - h_{\text{in}}/h(r). \quad (1.48)$$

В ньютоновском приближении  $f(r) = 1 - \sqrt{r_{\text{in}}/r}$  и

$$W_{r\varphi} = \frac{\dot{M} \omega}{2\pi} (1 - \sqrt{r_{\text{in}}/r}).$$

Для приблизительного учета эффектов общей теории относительности около невращающихся черных дыр можно использовать потенциал Пачинского–Виты [45]:

$$\Phi_{\text{PW}} = -\frac{GM}{r - R_g}.$$

Для круговых орбит свободных частиц скорость движения можно найти из уравнения (1.3):

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{d\Phi}{dr}. \quad (1.49)$$

Получаем удельный момент импульса пробной частицы в потенциале Пачинского-Вита:

$$h = v_\varphi r = \sqrt{\frac{G M r^3}{(r - R_g)^2}}.$$

Также используют следующий потенциал, точно описывающий релятивистское движение в шварцшильдовской метрике [43]:

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \ln \left( 1 - \frac{R_g}{r} \right) = c^2 \ln \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}}. \quad (1.50)$$

Здесь  $\sqrt{1 - R_g/r}$  — функция длительности в метрике Шварцшильда. Она определяет красное смещение сигнала, испускаемого вблизи черной дыры, и темп хода часов локального неподвижного наблюдателя  $\tau$  по сравнению с темпом хода часов на бесконечности  $t$ :  $d\tau/dt = \sqrt{1 - R_g/r}$ . Вычислим  $v_\varphi$ , используя (1.49):

$$\frac{v_\varphi}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_g}{r - R_g}}.$$

Удельный момент импульса частиц на круговых орбитах

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_\varphi/c)^2}} v_\varphi r = \frac{\sqrt{G M r}}{\sqrt{1 - \frac{3GM}{c^2 r}}}.$$

На Рис. 1.2 сверху показаны зависимости удельного момента импульса пробных частиц от радиуса орбиты в поле черной дыры (пунктиром и штриховой линией). Также для сравнения показан случай в ньютоновском потенциале (сплошная кривая). Орбиты частиц, у которых момент импульса падает с радиусом, являются неустойчивыми. В поле черной дыры Шварцшильда минимальное значение момента импульса  $h$  наступает на радиусе последней устойчивой орбиты  $6 GM/c^2$ . На Рис. 1.2 также изображены зависимости моментов вязких сил в диске, полученные по формуле (1.47), для двух потенциалов, приближенно описывающих поле черной дыры, в сравнении со случаем ньютоновского потенциала. Отметим, что для потенциала Пачинского-Виты и логарифмического потенциала на последней устойчивой орбите обращается в ноль как само значение момента вязких сил, так и его первая производная. Круговые орбиты существуют только до радиуса  $r = 3 R_g/2$ .

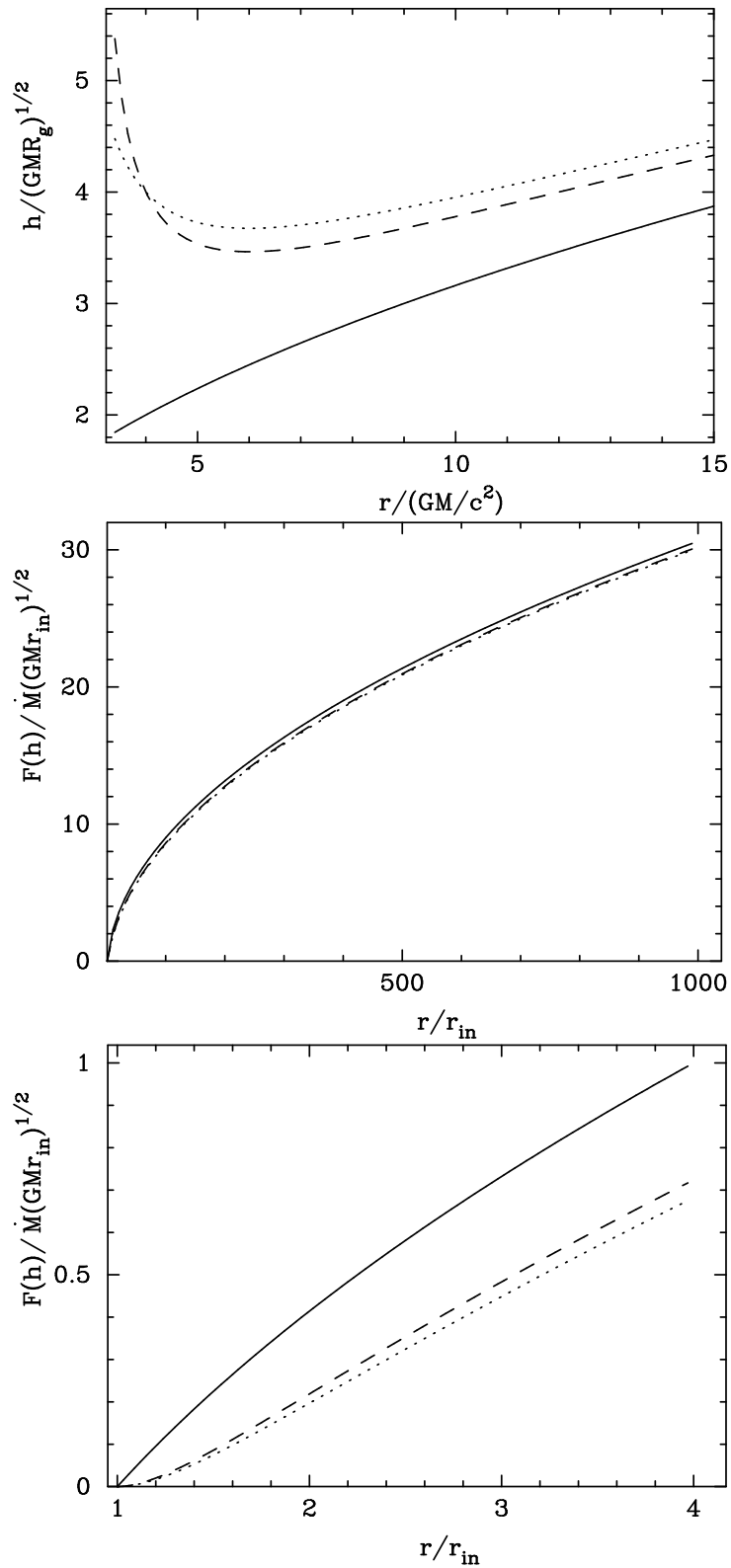


Рис. 1.2: Момент импульса  $h$  пробных частиц в поле черной дыры (сверху) и момент вязких сил  $F(h)$  в стационарном диске, нормированные значения. Внутренний радиус диска  $r_{in} = 3R_g = 6GM/c^2$ . Сплошные линии показывают зависимости в ньютоновском приближении, пунктирные — в метрике Пачинского-Виты, штриховые — в гравитационном потенциале вида (1.50).

Точный вид потенциала гравитационного поля и другие приближения, в частности, применимые для случая вращающихся черных дыр, можно найти в книгах Торна и др. [43], Като и др. [6].

Импульс и энергия релятивистской частицы с массой покоя  $m_o$  относительно локального неподвижного наблюдателя равны

$$\mathbf{p} = \frac{m_o \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad E_{\text{local}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}.$$

Можно также ввести понятие энергии на бесконечности или энергии частицы с учетом красного смещения [43]. Запишем уравнение движения в виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{m_o}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \nabla\Phi$$

(потенциал  $\Phi$  зависит только от  $r$ ). Домножаем скалярно на  $\mathbf{v}$  и интегрируем, учитывая по ходу, что

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}.$$

В результате получим соотношение

$$(1 - R_g/r) / (1 - \mathbf{v}^2/c^2) = \text{const}.$$

Из последнего соотношения находим поправку энергии частицы из-за красного смещения. Энергия свободно-падающей частицы, измеренная на бесконечности, является сохраняющейся величиной:

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}} = E_{\text{local}} \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}} = \text{const},$$

а локально-измеряемая энергия  $E_{\text{local}}$  меняется в гравитационном поле черной дыры. В нерелятивистском приближении энергия частицы приобретает известный вид [46]:

$$E - m_o c^2 = m_o v^2/2 - m_o G M/r.$$

Далее найдем энергию  $E$  частицы на последней устойчивой круговой орбите  $r_{\text{ISCO}}$ , которую измерит бесконечно удаленный наблюдатель. Подставим для этого в предпоследнее выражение скорость  $v_\varphi = \sqrt{GM/r} (1 - R_g/r)^{-1/2}$ ,



которую находим из формул (1.49) (1.50). Эта энергия  $E$  меньше энергии покоя частицы  $m_0 c^2$  на величину энергии гравитационной связи. Другими словами, при аккреции на шварцшильдовскую черную дыру выделяется энергия связи вещества, которая равна  $(m_0 c^2 - E) \approx 0.0572 m_0 c^2$ . То есть КПД выделения энергии в процессе аккреции на невращающуюся черную дыру равен  $\sim 6\%$ . Расчет в метрике Керра показывает, что максимальная энергия связи черной дыры, вращающейся с максимальной возможной скоростью, равна  $\approx 0.423$  энергии покоя.

### 1.4.5 Энерговыделение в геометрически тонких дисках

Вернемся к рассмотрению дисков в ньютоновском приближении. Энергия, диссипирующая в единице объема в единицу времени, равна

$$\varepsilon = \rho \nu_t r^2 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)^2. \quad (1.51)$$

В общем случае в оптически толстых дисках выделение энергии  $\varepsilon$  может быть дано в виде степенной зависимости от температуры и плотности [47]. В некотором смысле расчет вертикальной структуры диска аналогичен расчету внутреннего строения звезды.

Детальный разбор уравнения баланса энергии приведен, например, в приложении книги [6]. В самом простом приближении, в геометрически тонком диске вся энергия, выделяющаяся из-за трения в кольце диска, излучается с нижней и верхней поверхностей этого кольца. Энергия, выделяемая в единицу времени с единицы поверхности геометрически тонкого диска в расчете на одну сторону:

$$Q_{\text{vis}}(t, r) \equiv \int_0^{+z_0} \varepsilon(t, r, z) dz = -\frac{1}{2} W_{r\varphi} r \frac{d\omega}{dr}. \quad (1.52)$$

Заметим, что последняя формула работает и в случае так называемых дисков-накопителей [40], в которых темп аккреции равен нулю. Если привлечь глобальное уравнение сохранения момента импульса в виде (1.42), то для аккрецирующего диска получаем:

$$Q_{\text{vis}} = -\frac{\dot{M}}{4\pi} \omega r \frac{d\omega}{dr} f(r). \quad (1.53)$$

Для кеплеровского диска последние выражения можно переписать в виде (с учетом (1.51)):

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi} = \frac{9}{4} \rho \nu_t \omega_K^2, \quad Q_{\text{vis}} = \frac{3}{4} \omega_K W_{r\varphi} = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} f(r). \quad (1.54)$$

Для геометрически тонкого аккреционного диска с нулевым значением тензора вязкости на внутренней границе диска и с кеплеровским распределением момента импульса имеем (см. (1.48)):

$$Q_{\text{vis}} = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}}\right),$$

где  $r_{\text{in}}$  — радиус внутренней границы диска.

Уравнение энергетического баланса для геометрически тонких дисков отражает тот факт, что тепловая энергия, выделившаяся из-за вязкости на радиусе  $r$ , полностью излучается на том же радиусе:

$$Q_{\text{vis}}(r) = Q_{\text{rad}}(r), \quad (1.55)$$

где  $Q_{\text{rad}}(r)$  — поток излучения с одной из двух поверхностей аккреционного диска. Последнее уравнение требует коррекции в случае высокого темпа аккреции: оказывается, что необходимо также учитывать тепловой обмен данного кольца диска с соседними.

В приближении того, что диск излучает как черное тело, можно характеризовать его поток эффективной температурой:

$$Q_{\text{rad}} = \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4, \quad T_{\text{eff}} \propto r^{-3/4}. \quad (1.56)$$

Максимальная эффективная температура на поверхности диска  $T_{\text{max}}$  достигается на радиусе

$$r_{\text{max}} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 r_{\text{in}},$$

и равна

$$T_{\text{max}} = 2^{3/4} \left(\frac{3}{7}\right)^{7/4} \left(\frac{GM\dot{M}}{\pi\sigma_{\text{SB}}r_{\text{in}}^3}\right)^{1/4} = 2 \left(\frac{3}{7}\right)^{7/4} \left(\frac{L_d}{\pi\sigma_{\text{SB}}r_{\text{in}}^2}\right)^{1/4}.$$

В последней формуле введена полная болометрическая светимость диска с двух поверхностей, равная половине высвобожденной гравитационной энергии вещества, падающего из бесконечности на гравитирующий

центр:

$$L_d = 4 \pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} Q_{\text{rad}} r \, dr = \frac{1}{2} \dot{M} \frac{G M}{r_{\text{in}}}.$$

Удельная потенциальная энергия частицы при перемещении с бесконечности на внутренний край диска уменьшается с нуля до  $-G M/r_{\text{in}}$ . Половина этой энергии высвечивается, а половина — переходит в кинетическую энергию вращения.

Такая “теорема вириала” неприменима для отдельных колец в диске. Проинтегрируем энергию, выделенную диском на расстояниях  $r \gg r_{\text{in}}$  с двух сторон диска:

$$2 \int \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} 2 \pi r \, dr = \frac{3}{2} \dot{M} \frac{GM}{r},$$

— она в три раза превышает объем высвобожденной гравитационной энергии. Это происходит из-за того, что вместе с моментом импульса, который переносится наружу от центра при аккреции вещества, переносится и часть энергии.

Поток излучения в единичном телесном угле от плоского аккреционного диска на расстоянии  $d$  от него равен

$$F_\nu = \frac{2 \pi}{d^2} \cos i \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} I_\nu r \, dr, \quad (1.57)$$

где  $i$  — угол наклона диска к лучу зрения,  $I_\nu(r)$  — интенсивность излучения с поверхности диска.

### 1.4.6 Спектр диска

В фотосфере диска на разных радиусах могут иметь значение следующие процессы формирования излучения (см., например, [48]):

- Свободно-свободные и свободно-связанные переходы,
- Рассеяние на свободных электронах,
- Комптон-эффект (рассеяние на холодных электронах),
- Обратный Комптон-эффект (если энергия электронов и/или ионов очень большая),

- Линии, уширенные в результате вращения диска

В изотермичной атмосфере, если не учитывать рассеяние, формируется планковский спектр. На каждом радиусе диск излучает как черное тело температуры  $T_{\text{eff}}$  с интенсивностью:

$$B_{\nu}(T_{\text{eff}}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_{\text{eff}}} - 1}. \quad (1.58)$$

Спектральный поток, проинтегрированный по радиусу диска, показан на рис. 1.3.

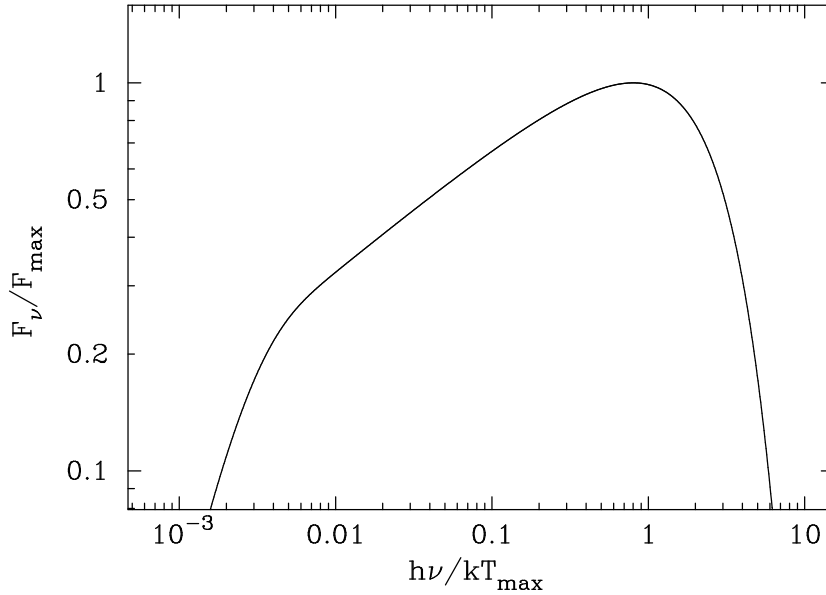


Рис. 1.3: Спектральное распределение плотности потока излучения стандартного оптически-толстого геометрически-тонкого диска в ньютоновской метрике. По горизонтальной оси отложена частота излучения, нормированная на  $kT_{\text{max}}/h$ . По вертикальной оси — спектральная плотность потока в единицах  $[\text{эрг Гц}^{-1} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}]$ , нормированная на значение в максимуме, который наступает при значении абсциссы  $\approx 0.805$ .

Для спектра диска, изображенного на рис. 1.3, характерно степенное распределение для среднего интервала частот. Найдем показатель этой степени. Практически во всем диске, за исключением центральных

областей (которые, однако, дают подавляющий вклад в общий объем излучаемой энергии), эффективная температура характеризуется простой степенной зависимостью от радиуса (1.56). Подставляя  $r = r_0(T_0/T_{\text{eff}})^{4/3}$  и (1.58) в интеграл (1.57), получаем

$$F_\nu = \frac{16\pi}{3d^2} \cos i \left( \frac{kT_0}{h} \right)^{8/3} \frac{h\nu^{1/3}}{c^2} r_0^2 \int_{x_{\text{in}}}^{x_{\text{out}}} \frac{x^{5/3}}{e^x - 1} dx,$$

где была произведена замена  $x = h\nu/kT_{\text{eff}} = (h\nu/kT_0)(r/r_0)^{3/4}$ .

Радиус  $r_0$  может быть выбран достаточно близко к  $r_{\text{in}}$  и  $T_0 \approx T_{\text{max}}$  без большой потери точности. Тогда  $x = (h\nu/kT_{\text{max}})(r/r_{\text{in}})^{3/4}$ . Для таких частот, когда выполняются условия  $x_{\text{in}} \ll 1$  и  $x_{\text{out}} \gg 1$ , интеграл в последнем выражении мало меняется по величине для разных  $\nu$  и приблизительно равен интегралу в пределах от нуля до бесконечности, выражаемому с помощью специальных гамма-функции и дзета-функции Римана  $(10/9)\Gamma(2/3)\zeta(8/3) \approx 1.93$ . Итак, для большого интервала частот  $(r_{\text{in}}/r_{\text{out}})^{3/4} < h\nu/kT_{\text{max}} < 1$  спектральная плотность потока излучения диска зависит от частоты по закону  $F_\nu \propto \nu^{1/3}$ .

Для однородной атмосферы при наличии рассеяния спектр будет отличаться от чернотельного [49]:

$$I_\nu \simeq \sqrt{\frac{\kappa_a}{\kappa_a + \kappa_{\text{sc}}}} B_\nu(T_{\text{eff}}),$$

где  $\kappa_a$  — коэффициент поглощения,  $\kappa_{\text{sc}}$  — коэффициент рассеяния на свободных электронах. Если рассеяние на электронах доминирует над поглощением и если спектр диска подвержен комптонизации, изменение формы рентгеновского спектра диска вокруг компактного объекта звездной массы приближенно описывается параметром увеличения жесткости спектра  $f_c$ :

$$F_\nu = \frac{1}{f_c^4} \pi B_\nu(f_c T_{\text{eff}}),$$

где  $F_\nu$  — поток с единичной поверхности в полупространство. Произведение  $f_c T_{\text{eff}}$  называют цветовой температурой. Четвертая степень объясняется тем, что полная излученная энергия диска не зависит от формы спектра.

## 1.5 Стационарные $\alpha$ -диски

Как мы видели в § 1.4, использование проинтегрированных (или усредненных) по вертикальной координате уравнений неразрывности и сохранения момента импульса позволяет найти радиальную структуру тонких стационарных аккреционных дисков. Раздельное рассмотрение вертикальной и радиальной структуры диска возможно по причине того, что характерные времена, — вязкое и гидростатическое, — имеют существенно разные масштабы. Характерное гидростатическое время соответствует времени изменения толщины диска на данном радиусе в результате изменения его центральной температуры. По соображениям размерности эта величина пропорциональна полутолщине диска, деленной на скорость звука:  $z_0/v_s \sim 1/\omega_K \sim \tau_{\text{dyn}}$ , и соответствует динамическому времени, которое много меньше вязкого для тонкого диска (см. § 1.4.3).

Вертикальная структура аккреционных дисков в общем случае (как стационарных, так и нестационарных) описывается системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, точное решение которых при заданных граничных условиях может быть найдено численными методами. Система дифференциальных уравнений для вертикальной структуры диска решалась в ряде работ (см., например, [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]).

### 1.5.1 Уравнения вертикальной структуры

#### 1. Уравнение гидростатического баланса

Уравнение гидростатического баланса по  $z$ -координате в ньютоновской метрике и в случае тонкого диска имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\omega_K^2 z, \quad (1.59)$$

где  $P(z)$  — полное давление в диске, равное сумме давления излучения  $P_{\text{rad}}(z) = aT^4/3$ , где  $a = 7.56 \times 10^{-15}$  эрг/см<sup>3</sup>/К<sup>4</sup> — радиационная постоянная, и давления газа  $P_{\text{gas}}(z)$ , которое определяется из уравнения состояния для идеального газа:

$$P_{\text{gas}} = \frac{\rho kT}{\mu m_p},$$

$\mu$  — средний молекулярный вес вещества в диске,  $T(z)$  — температура,  $\rho(z)$  — плотность вещества.

## 2. Генерация энергии

Рассмотрим на данном радиусе выделенное тепло между плоскостью симметрии диска и данным уровнем на высоте  $z$  как функцию вертикальной координаты  $z$ :

$$Q_{\text{vis}}(z) = \int_0^z \varepsilon \, d\tilde{z}.$$

Скорость генерации энергии  $\varepsilon$  [эрг · см<sup>-3</sup> · с<sup>-1</sup>] в кеплеровском диске определяется тензором вязких напряжений, полученным из (1.54):

$$\frac{dQ_{\text{vis}}}{dz} = \frac{3}{2} \omega_{\text{К}} w_{r\varphi}. \quad (1.60)$$

Компонента тензора турбулентной вязкости  $w_{r\varphi}(z)$  локально в диске выражается через полное давление в этом месте при помощи параметра  $\alpha$ :

$$w_{r\varphi} = \alpha P.$$

Эти уравнения представляют собой самую простую гипотезу об энерговыделении в диске. Возможно моделирование вертикальной структуры и при более сложных предположениях. Например, в [57] рассмотрена турбулентная диффузия в диске, которая определяет зависимость вязкого нагрева и величину самого  $\alpha$ -параметра от  $z$ .

## 3. Перенос излучения в диске

Если непрозрачность в диске не превышает определенных значений, перенос энергии по вертикали к поверхностям диска осуществляется электромагнитным излучением. Предполагаем, что в толще диска выполняется условие локального термодинамического равновесия (ЛТР), то есть выполняется закон Кирхгофа, согласно которому [48, 58]

$$j_\nu = 4\pi \kappa_a(\nu) B_\nu(T),$$

где  $j_\nu$  — удельный коэффициент излучения [эрг с<sup>-1</sup> г<sup>-1</sup> стер<sup>-1</sup> Гц<sup>-1</sup>],  $\kappa_a(\nu)$  — удельный коэффициент поглощения [см<sup>2</sup> г<sup>-1</sup>],  $B_\nu(T)$  — Планковское распределение [эрг с<sup>-1</sup> см<sup>-2</sup> стер<sup>-1</sup> Гц<sup>-1</sup>],  $T(z)$  — температура.

Выпишем моменты стационарного уравнения переноса излучения [59]. Предполагаем, что среда неподвижна в направлении распространения

излучения — по  $z$ . Нулевой момент уравнения переноса получается в результате интегрирования по всем телесным углам основного уравнения переноса излучения. После интегрирования его по частоте получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{dQ_{\text{rad}}}{dz} = 4\pi(\kappa_{\text{P}} B_{\nu}(T) - \kappa_{\text{a}} J), \quad (1.61)$$

где  $\kappa_{\text{a}}$  — средний по частоте удельный коэффициент поглощения, при термодинамическом равновесии равный планковскому среднему  $\kappa_{\text{P}}$  [59],  $Q_{\text{rad}}(z)$  — поток лучистой энергии вдоль  $z$ ,  $B_T = \sigma_{\text{SB}} T^4 / \pi$  — интегральная по частоте функция Планка,  $J(z)$  — интегральная по частоте средняя интенсивность излучения, входящего в слой  $dz$ . Физический смысл этого уравнения ясен: изменение потока лучистой энергии равно энергии, поступающей в результате излучения вещества (этот член записан при помощи закона Кирхгофа), минус энергия, поглощаемая веществом.

Первый момент уравнения лучистого переноса получается путем умножения на косинус угла к единичной площадке, деления на  $c$  и интегрирования по всем телесным углам. По смыслу это уравнение выражает сохранение полного импульса излучения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP_{\text{rad}}(\nu)}{dz} = -(\kappa_{\text{a}}(\nu) + \kappa_{\text{s}}(\nu)) \frac{Q_{\text{rad}}(\nu)}{c}. \quad (1.62)$$

Здесь присутствуют зависящий в общем случае от частоты коэффициент рассеяния  $\kappa_{\text{s}}(\nu, z)$ , а также  $Q_{\text{rad}}(\nu, z)$  и  $P_{\text{rad}}(\nu, z)$  — поток лучистой энергии вдоль  $z$  и лучистое давление на частоте  $\nu$  соответственно. Сила давления излучения уравновешивает изменение импульса излучения в результате взаимодействия с веществом.

Рассматривая моменты уравнения, мы избавляемся от угловой переменной. Средняя интенсивность излучения  $J_{\nu}$  является нулевым моментом интенсивности. Спектральный поток лучистой энергии  $Q_{\nu}$  — первым моментом, давление излучения  $P_{\text{rad}}$  — вторым моментом. Как известно, каждый момент уравнения переноса содержит в себе величину следующего порядка. Решение таких систем уравнений требует наложения некоторых дополнительных замыкающих соотношений. Основным методом замыкания для изотропного поля излучения является эддингтоновское приближение.

Средняя интенсивность излучения  $J(z)$  связана по определению с плотностью лучистой энергии соотношением:

$$\varepsilon_{\text{rad}} = \frac{4\pi J}{c}. \quad (1.63)$$



Для изотропного поля излучения имеет место простая связь между плотностью лучистой энергии и давлением излучения:

$$P_{\text{rad}} = \frac{\varepsilon_{\text{rad}}}{3}. \quad (1.64)$$

Это приближение хорошо выполняется в случае геометрически тонкого диска (как оптически толстого, так и тонкого).

Для оптически-толстого диска (оптическая толщина  $\tau \gg 1$ ) можно провести рассмотрение в “диффузионном приближении”: в первом моменте уравнения переноса излучения (1.61) полагаем, что изменение  $dQ_{\text{rad}}$  несущественно, а рассматриваем второй момент уравнения переноса излучения (1.62). Таким образом, спектр излучения близок к чернотельному:  $J(z) = B_T$ . Из соотношения (1.63) следует, что  $\varepsilon_{\text{rad}} = 4\pi B_T/c \equiv aT^4$ , и при учете изотропии поля излучения, проинтегрировав по частотам, получаем из (1.62):

$$\frac{c}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \frac{d(aT^4)}{dz} = -Q_{\text{rad}}, \quad (1.65)$$

где введен коэффициент непрозрачности Росселанда  $\kappa_{\text{R}}(z)$ :

$$\frac{1}{\kappa_{\text{R}}} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_{\text{a}}(\nu) + \kappa_{\text{s}}(\nu)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}. \quad (1.66)$$

Если рассмотреть усредненные по  $z$  величины, получаем:

$$Q_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \frac{c}{\kappa_{\text{R}} \rho z_0} \varepsilon_{\text{rad}}. \quad (1.67)$$

Вертикальная структура дисков при учете переноса энергии излучения и конвекции была рассмотрена в [50] при двух вариантах вязкости, пропорциональной давлению газа и пропорциональной полному давлению.

#### 4. Зависимость поверхностной плотности от $z$ .

Введем величину  $\Sigma(z)$  — поверхностную плотность диска, “набирающуюся” до некоторой высоты  $z$  и с ее помощью перепишем уравнение (1.36):

$$\frac{d\Sigma}{dz} = \rho. \quad (1.68)$$

### 1.5.2 Решение вертикальной структуры

В этом разделе описан подход к решению уравнений вертикальной структуры диска, предложенный и осуществленный в работе [54]. Метод заключается в поиске подобных решений системы уравнений, приведенной к безразмерному виду, с использованием степенных аппроксимаций коэффициента непрозрачности и темпа выделения энергии от  $\rho$  и  $T$ . Полученное решение сравнивается с результатом другого решения в работе Сулейманова и др. [60], и показано согласие обоих методов.

Диск можно разделить на зоны по типу процесса, преобладающего в формировании непрозрачности, и по тому, какое давление играет определяющую роль, газовое или лучистое ШС73с. Высокотемпературная зона с основным вкладом давления излучения в уравнение гидростатического равновесия может возникать в самых центральных областях диска — зона А. В этой области непрозрачность определяется рассеянием на электронах. Ряд исследований посвящен неустойчивостям в этой области [13, 14, 15]. Мы рассмотрим более холодные области, В и С, для которых опишем стационарные решения.

Итак, при достаточно больших температурах главную роль играют процессы томсоновского рассеяния на свободных электронах. Соответствующая область диска, в которой в то же время преобладает газовое давление, называется зоной В. Дальше от центра преобладают процессы фотоионизации ионов тяжелых элементов и свободно-свободные переходы — зона С. Вкладом давления излучения в полное давление в этих двух зонах пренебрегаем. В зоне В это предположение заметно ограничивает точность решения, если  $P_{\text{rad}} \gtrsim (0.2 \div 0.3) P_{\text{gas}}$ .

При расчете вертикальной структуры диска будем считать, что в энергию излучения переходит все тепло, выделенное в результате работы вязких сил в диске на данных  $r$  и  $z$ . В частности, выполняется локальное уравнение баланса энергии (1.55). Заменим везде  $Q_{\text{rad}}(z) = Q_{\text{vis}}(z) = Q(z)$ .

Выпишем вместе уравнения вертикальной структуры диска (1.59),

(1.60), (1.65) и (1.68):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} &= -\omega_K^2 z, \\
 \frac{d\Sigma}{dz} &= \rho, \\
 \frac{dQ}{dz} &= \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}, \\
 \frac{1}{3\kappa_R \rho} \frac{d(aT^4)}{dz} &= -Q.
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

Для  $\alpha$ -дисков темп энерговыделения  $\varepsilon$  пропорционален давлению.

Коэффициент непрозрачности представляем в виде степенной зависимости

$$\kappa_R = \kappa_0 \frac{\rho^\zeta}{T^\Upsilon}. \tag{1.70}$$

В случае доминирующей роли рассеяния в непрозрачности

$$\zeta = \Upsilon = 0, \quad \kappa_0 = 0.4 \text{ см}^2/\Gamma, \quad \text{если } \kappa_T \gg \kappa_{\text{ff}}, \tag{1.71}$$

а в случае доминирующей роли поглощения

$$\zeta = 1, \Upsilon = 7/2, \quad \kappa_0 = 6.45 \cdot 10^{22} \text{ см}^5 \cdot \text{К}^{7/2} \cdot \Gamma^{-2}, \quad \text{если } \kappa_{\text{ff}} \gg \kappa_T \tag{1.72}$$

для водородных дисков и

$$\begin{aligned}
 \zeta = \Upsilon = 0, \quad \kappa_0 &= 0.335 \text{ см}^2/\Gamma, \quad \text{если } \kappa_T \gg \kappa_{\text{ff}}, \\
 \zeta = 1, \Upsilon = 7/2, \quad \kappa_0 &\approx 5 \cdot 10^{24} \text{ см}^5 \cdot \text{К}^{7/2} \cdot \Gamma^{-2}, \quad \text{если } \kappa_{\text{ff}} \gg \kappa_T,
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

для дисков из вещества с солнечным химическим составом [7, 61, 62]. Расчеты поглощения в плазме с учетом коллективных и квантовых эффектов, вырождения электронов и т.д., производимые проектом ORAL Ливерморской лабораторией [63] (см. Рис. 1.4) дают немного другую зависимость от температуры в области доминирующего поглощения:

$$\zeta \approx 1, \Upsilon \approx 5/2, \quad \kappa_0 \approx 1.5 \cdot 10^{20} \text{ см}^5 \cdot \text{К}^{5/2} \cdot \Gamma^{-2}, \quad \text{если } \kappa_{\text{ff}} \gg \kappa_T. \tag{1.74}$$

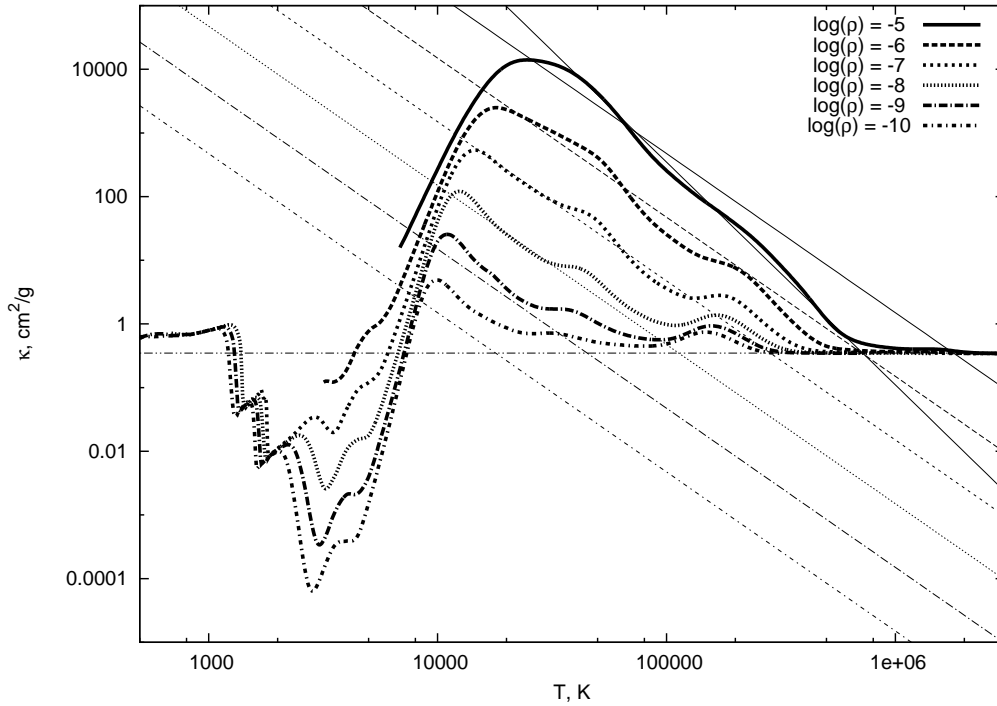


Рис. 1.4: Зависимость коэффициента непрозрачности от плотности и температуры по данным прокета OPAL [63] и расчетов для низкотемпературной области [64] в среде с солнечным химсоставом. Горизонтальная прямая соответствует величине коэффициента рассеяния на свободных электронах  $\kappa_0 \simeq 0.34 \text{ см}^2/\text{г}$ . Для плотности  $\rho = 10^{-5} \text{ г см}^{-3}$  показаны две аппроксимации: (1.72) и более подходящая в области высоких температур зависимость  $\kappa_R = 1.2 \times 10^{25} \rho T^{-7/2} \text{ см}^5 \text{ К}^{7/2} / \Gamma^2$ .

Вводим для удобства описания безразмерную переменную<sup>6</sup>

$$\sigma = \frac{2 \Sigma(z)}{\Sigma_0},$$

а также безразмерные функции этой переменной:

$$p = P(z)/P_c, \quad \theta = T(z)/T_c, \quad z' = z/z_0, \quad j = \rho(z)/\rho_c \quad \text{и} \quad q = Q(z)/Q_0.$$

<sup>6</sup>В оригинальной статье [54] параметром  $\Sigma_0$  обозначена половина полной поверхностной плотности диска. Из-за этого есть отличия в числовых коэффициентах некоторых приведенных ниже по тексту формул по сравнению с формулами в [54].

Символами  $P_c$ ,  $T_c$ ,  $\rho_c$ , обозначены физические величины в экваториальной плоскости диска.  $Q_0 = (ac/4) T_{\text{eff}}^4$  — чернотельный поток с одной поверхности диска. Перепишем систему уравнений (1.69) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{d\sigma} &= -\Pi_1 \Pi_2 z' ; & \Pi_1 &= \frac{\omega_K^2 z_0^2 \mu}{\Re T_c} ; \\
 \frac{dz'}{d\sigma} &= \Pi_2 \frac{\theta}{p} ; & \Pi_2 &= \frac{\Sigma_0}{2 z_0 \rho_c} ; \\
 \frac{dq}{d\sigma} &= \Pi_3 \theta ; & \Pi_3 &= \frac{3}{4} \frac{\alpha \omega_K \Re T_c \Sigma_0}{Q_0 \mu} \equiv \frac{\alpha \Re T_c \Sigma_0}{W_{r\varphi} \mu} ; \\
 \frac{d\theta}{d\sigma} &= \Pi_4 \frac{q j^{\zeta}}{t^{\gamma+3}} ; & \Pi_4 &= \frac{3}{32} \left( \frac{T_{\text{ef}}}{T_c} \right)^4 \frac{\Sigma_0 \varkappa_0 \rho_c^{\zeta}}{T_c^{\gamma}} .
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Удельная величина диссипации энергии  $\varepsilon/\rho = \partial Q/\partial \Sigma$  определяет зависимость температуры от  $z$ . В принципе, интенсивное перемешивание в диске может привести к ситуации, когда выделение энергии на единицу массы не зависит от высоты  $z$ . Величина  $\varepsilon$  при этом зависит только от плотности. При этом исчезает температурная зависимость в уравнении, описывающем выделение энергии (третья строчка в (1.75)), и  $\Pi_3$  становится равным 1.

Чтобы найти решение (1.75), то есть найти четыре функции  $p(\sigma)$ ,  $z'(\sigma)$ ,  $q(\sigma)$ ,  $t(\sigma)$  и четыре неизвестных параметра, надо поставить восемь граничных условий — четыре на поверхности диска и четыре в его плоскости симметрии. В [54] проведено численное интегрирование системы уравнений и затабулированы значения  $\Pi_{1..4}$ . Эти значения приведены в Таблицах 1.1 и 1.2. На Рис. 1.5 изображено решение для функций  $z'(\sigma)$ ,  $p(\sigma)$ ,  $\theta(\sigma)$  и  $q(\sigma)$  в режиме непрозрачности по Крамерсу. Другие случаи показаны в работе [54].

В плоскости симметрии диска при  $\sigma = 0$  имеем очевидные условия:

$$p(0) = 1; \quad z'(0) = 0; \quad q(0) = 0; \quad \theta(0) = 1.$$

Естественным образом также устанавливаются два первых граничных условия на поверхности диска:

$$z'(1) = 1; \quad q(1) = 1.$$

Поверхность диска определяем как уровень, на котором происходит термализация излучения. Из приближенного решения уравнений переноса излучения и гидростатического баланса вблизи поверхности диска могут быть найдены граничные условия на давление и температуру. Обращаем внимание, что есть разница в граничных условиях для разных режимов непрозрачности. В зоне В с преобладающей ролью поглощения за поверхность диска принят уровень фотосферы, где оптическая толщина, рассчитываемая снаружи, равна  $2/3$ . В зоне с преобладающей ролью томсоновского рассеяния в качестве поверхности диска берется уровень, где эффективная оптическая глубина, рассчитываемая с учетом процессов рассеяния, равна 1.

Приведем вывод оставшихся граничных условий для двух режимов непрозрачности.

**Непрозрачность по Крамерсу.** Будем измерять оптическую толщину  $\tau$  с поверхности диска по направлению к его плоскости симметрии, то есть по направлению уменьшения  $z$ . На высоте фотосферы диска, где  $\tau \sim 1$ , используем решение уравнений переноса излучения и лучистого равновесия для фотосферы в условиях ЛТР для не зависящего от частоты коэффициента поглощения в приближении Эддингтона [58]:

$$\frac{T}{T_{\text{eff}}} = \left( \frac{1 + \frac{3}{2}\tau}{2} \right)^{1/4}.$$

Пусть безразмерная переменная  $\sigma = 1$  на уровне, где  $\tau = 2/3$  и  $T = T_{\text{eff}}$ . Из этого получаем граничное условие для безразмерной температуры  $t$ :

$$t(\sigma = 1) = \left[ \frac{16}{3} \frac{\Pi_4}{\tau_0} \right]^{1/4},$$

где мы ввели безразмерный параметр  $\tau_0$ , пропорциональный полной оптической толщине аккреционного диска (см. (1.72)):

$$\tau_0 = \frac{\Sigma_0 \kappa_0 \rho_c}{2 T_c^{7/2}}.$$

Эта величина является свободным параметром задачи и меняется в широких пределах (от нескольких единиц до  $\sim 10^6$ ).

Чтобы определить граничное условие для безразмерного давления, используем уравнение гидростатического баланса (первое в системе (1.69)). Разделим обе его части на коэффициент непрозрачности  $\varkappa_R$  и произведем замену переменных с помощью формулы

$$d\tau = -\varkappa_R \rho dz.$$

Получим с учетом (1.72):

$$\frac{1}{2} \frac{dP^2}{d\tau} = \frac{\omega_K^2 z_0 \Re T^{9/2}}{\varkappa_0 \mu}.$$

Вблизи фотосферы координата  $z$  практически не меняется и равна  $z_0$ . Интегрируя последнее уравнение от  $\tau = 0$  до  $\tau = 2/3$ , получаем в результате граничное условие на безразмерное давление:

$$p(\sigma = 1) = \left[ \frac{3}{16 \cdot 2^{1/8}} \frac{\Pi_1 \Pi_2}{\Pi_4} \left( \frac{16 \Pi_4}{3 \tau_0} \right)^{17/8} f(\tau = 2/3) \right]^{1/2},$$

где

$$f(\tau) = \int_0^\tau \left( 1 + \frac{3}{2} \tilde{\tau} \right)^{9/8} d\tilde{\tau}, \quad f(\tau = 2/3) \approx 1.05.$$

На Рис. 1.5 изображено решение системы уравнений для данного случая.

**Томсоновское рассеяние.** Если в фотосфере велика роль процессов рассеяния, то термализация наступает на глубине, где так называемая эффективная оптическая толщина диска порядка 1:

$$\tau^* = - \int_{z_0}^{z^*} (\varkappa_{\text{ff}} \varkappa_{\text{T}})^{1/2} \rho dz \approx 1.$$

Эффективная оптическая толщина набирается как  $d\tau^\dagger = \sqrt{\varkappa_{\text{ff}}(\varkappa_{\text{T}} + \varkappa_{\text{ff}})} \rho dz$ , что приближенно дает последнее условие (см., например, [65, 66]). На этой глубине оптическая толщина по рассеянию намного превосходит 1:

$$\tau_{\text{T}} = - \int_{z_0}^{z^*} \varkappa_{\text{T}} \rho dz \gg 1.$$

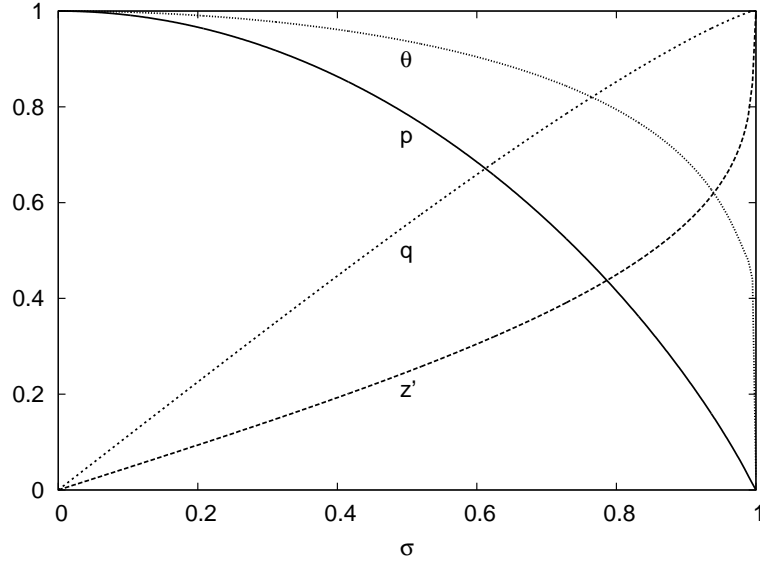


Рис. 1.5: Решение системы (1.75) в виде безразмерных функции от безразмерной переменной  $\sigma$ , пропорциональной колонковой плотности: температура  $\theta(\sigma)$ , давление  $p(\sigma)$ , поток излучения  $q(\sigma)$  и высота в диске  $z'(\sigma)$ . В плоскости симметрии диска  $\sigma = 0$ , на поверхности  $\sigma = 1$ .

Таким образом, граничное условие на безразмерную температуру имеет следующий вид:

$$t(\sigma = 1) = \left[ \frac{16}{3} \frac{\Pi_4}{\varkappa_T \Sigma_0} \left( 1 + \frac{3}{2} \tau \right) \right]^{1/4} \simeq \left[ \frac{8 \Pi_4 \tau_T(\tau^* = 1)}{\varkappa_T \Sigma_0} \right]^{1/4}.$$

Для давления можно соответственно получить:

$$p(\sigma = 1) = 2 \Pi_1 \Pi_2 \frac{\tau_T(\tau^* = 1)}{\varkappa_T \Sigma_0}.$$

Удобным свободным параметром оказывается величина

$$\delta = \frac{\varkappa_T \Sigma_0 / 2}{\tau_T(\tau^* = 1)}, \quad \text{где} \quad \tau^* = \int_{z^*}^{\infty} (\varkappa_{\text{ff}} \varkappa_T)^{1/2} \rho dz, \quad (1.76)$$

которая представляет собой отношение оптической толщи по рассеянию от поверхности диска до его плоскости симметрии к оптической толще по рассеянию на глубине термализации.



Таблица 1.1: Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для томсоновской непрозрачности

в зависимости от десятичного логарифма свободного параметра  $\delta$ .

$\log \delta$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$
6.00	6.99	0.492	1.150	0.460
5.80	6.96	0.493	1.150	0.460
5.60	6.92	0.495	1.150	0.460
5.40	6.87	0.496	1.150	0.460
5.20	6.82	0.498	1.150	0.460
5.00	6.77	0.500	1.150	0.460
4.80	6.70	0.503	1.150	0.460
4.60	6.63	0.505	1.150	0.460
4.40	6.55	0.508	1.150	0.460
4.20	6.47	0.512	1.150	0.460
4.00	6.37	0.516	1.150	0.460
3.80	6.26	0.520	1.149	0.460
3.60	6.13	0.525	1.149	0.460
3.40	5.99	0.531	1.149	0.460
3.20	5.84	0.538	1.149	0.460
3.00	5.67	0.546	1.149	0.459
2.80	5.48	0.555	1.148	0.459
2.60	5.26	0.566	1.147	0.458
2.40	5.02	0.578	1.146	0.458
2.20	4.76	0.593	1.145	0.456
2.00	4.47	0.610	1.142	0.454
1.80	4.15	0.629	1.138	0.450
1.60	3.81	0.652	1.133	0.444
1.40	3.43	0.678	1.126	0.435
1.20	3.03	0.707	1.117	0.420
1.00	2.61	0.740	1.105	0.398
0.80	2.19	0.776	1.091	0.366
0.60	1.77	0.813	1.075	0.324
0.40	1.38	0.849	1.059	0.274
0.20	1.03	0.884	1.044	0.219
0.00	0.74	0.914	1.032	0.166

Таблица 1.2: Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для непрозрачности по Крамерсу

в зависимости от десятичного логарифма свободного параметра  $\tau_0$ . В последнем столбце приведен десятичный логарифм от оптической

$\log \tau_0$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	$\log \tau$
6.00	7.75	0.465	1.131	0.399	6.046
5.80	7.71	0.466	1.131	0.399	5.847
5.60	7.67	0.468	1.131	0.399	5.646
5.40	7.62	0.469	1.131	0.399	5.445
5.20	7.56	0.471	1.131	0.399	5.245
5.00	7.50	0.473	1.131	0.399	5.045
4.80	7.44	0.475	1.131	0.399	4.845
4.60	7.36	0.477	1.131	0.399	4.644
4.40	7.27	0.480	1.131	0.399	4.444
4.20	7.18	0.483	1.131	0.399	4.244
4.00	7.07	0.487	1.131	0.399	4.043
3.80	6.95	0.491	1.131	0.399	3.843
3.60	6.82	0.496	1.131	0.399	3.643
3.40	6.67	0.501	1.131	0.399	3.443
3.20	6.50	0.508	1.131	0.398	3.243
3.00	6.31	0.515	1.131	0.398	3.043
2.80	6.10	0.524	1.130	0.398	2.842
2.60	5.87	0.534	1.130	0.398	2.642
2.40	5.60	0.546	1.129	0.397	2.442
2.20	5.31	0.560	1.128	0.397	2.241
2.00	4.98	0.576	1.126	0.395	2.040
1.80	4.62	0.596	1.124	0.393	1.839
1.60	4.23	0.619	1.120	0.389	1.638
1.40	3.79	0.647	1.114	0.383	1.434
1.20	3.33	0.679	1.106	0.371	1.232
1.00	2.83	0.716	1.095	0.354	1.025
0.80	2.34	0.756	1.081	0.326	0.819
0.60	1.86	0.798	1.065	0.286	0.613
0.40	1.42	0.838	1.050	0.237	0.406
0.20	1.05	0.876	1.036	0.185	0.202
0.00	0.75	0.908	1.025	0.136	-0.001

толщи диска (1.89).

### 1.5.3 Радиальные зависимости физических параметров в стационарных $\alpha$ -дисках

Интерпретация наблюдений источников с аккреционными дисками как протяженных объектов, свойства которых существенно изменяются от центра к периферии, требует расчета радиальных зависимостей физических параметров в диске. Для этого необходимо решить уравнение переноса момента импульса, что сделано для случая стационарного диска в §1.4, а также необходимо решить уравнения вертикальной структуры, чему посвящен предыдущий раздел. В работе Сулейманова и др. [60] по результатам сравнения двух методов расчета вертикальной структуры были даны аналитические аппроксимации для радиальных зависимостей параметров в диске, которые мы опишем ниже.

Будем рассматривать следующие физические параметры: поверхностную плотность  $\Sigma(r)$ , полутолщину диска  $z_o(r)$ , плотность  $\rho_c(r)$  и температуру  $T_c(r)$  в плоскости симметрии диска при  $z = 0$ . Необходимо договориться, что мы считаем поверхностью диска. При исследовании наблюдаемых спектров оказывается удобным принять, что поверхность диска соответствует уровню, на котором Росселандова оптическая глубина  $\tau_R = 2/3$ .

Вертикальная структура диска определяется уравнениями (1.75) при известных значениях безразмерных параметров П<sub>1.4</sub>. Выразим из (1.75) величины  $z_o(r)$ ,  $\Sigma(r)$ ,  $\rho_c$  и  $T_c()$ . В получающиеся выражения будут входить основные задаваемые параметры диска (темп аккреции, масса центрального объекта, параметр турбулентности  $\alpha$ ) и радиальная структура через  $\omega_K$  и  $W_{r\varphi}$ . Радиальную зависимость интегрированной по вертикали компоненты тензора вязких напряжений  $W_{r\varphi}(r)$  берем для случая стационарного диска, — формулу (1.53), — а угловую скорость вращения полагаем равной кеплеровской  $\omega_K = \sqrt{GM/R^3}$ . Распределение  $W_{r\varphi}(r)$  определяет распределение по радиусу потока излучения с поверхности диска. Напомним, что для диска с постоянным темпом аккреции функция  $f(R)$ , которая описывает влияние граничных условий на поверхностное натяжение  $W_{r\varphi}(r)$ , записывается так (ср. с (1.42)):

$$f(r) = \frac{2 \pi W_{r\varphi}(r)}{\dot{M} \omega} = \frac{F}{\dot{M} h}.$$

Для тонкого диска при  $\dot{M} = const$  при нулевом тензоре вязких напряже-

ний на внутреннем радиусе справедливо

$$f(r) = \frac{8\pi}{3} \frac{Q_{\text{vis}}}{\dot{M}\omega^2} = 1 - \frac{h_{\text{in}}}{h}.$$

Для случая  $\dot{M} = \dot{M}(r, t) \neq \text{const}$  надо использовать функцию  $f(r)$  в общем виде:

$$f(r) = \frac{F(h, t)}{\dot{M}_{\text{in}}(t)h} = \frac{F(h, t)/h}{\partial F(h, t)/\partial h|_{h=h_{\text{in}}}}. \quad (1.77)$$

Отнормируем темп аккреции через внутреннюю границу диска и другие параметры диска на их характерные значения в двойных системах с компонентами звездных масс:

$$\begin{aligned} M &= m M_{\odot}, & \dot{M} &= \dot{M}_{17} \times 10^{17} \text{Г/с}, \\ r &= R_7 \times 10^7 \text{см (зона В)} \quad \text{или} \quad r = R_{10} \times 10^{10} \text{см (зона С)}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

В качестве характерного значения коэффициента  $\varkappa_0$  из выражения (1.70) мы используем в зоне В величину  $\varkappa_{\text{T}}^* = 0.335 \text{ см}^2/\text{Г}$ , полученную аппроксимацией к табличным значениям [61, 62], для среды с весовыми долями водорода  $X = 0.69$  и гелия  $Y = 0.27$ , и величину  $\varkappa_0^* = 5 \times 10^{24} \text{ см}^5 \text{Г}^{-2} \text{К}^{7/2}$  в зоне С [7, глава 5]. Соответствующий молекулярный вес  $\mu$  равен 0.62. В среде с таким химическим составом поглощение излучения происходит, главным образом, в результате фотоионизации ионов тяжелых элементов. Если в формулах для радиальных зависимостей физических параметров диска положить все параметры  $\Pi_{1..4}$  равными 1,  $\varkappa_{\text{T}} = 0.4 \text{ см}^2/\text{Г}$ ,  $\varkappa_0 = 6.4 \times 10^{22} \text{ см}^5 \text{Г}^{-2} \text{К}^{7/2}$  и  $\mu = 0.5$ , то они совпадут с выражениями из [6, глава 3], выведенными для водородных дисков..

**Зона В** В этой зоне основной вклад в непрозрачность дают процессы рассеяния на свободных электронах, газовое давление больше радиационного. Используя формулу (1.53) для тепла, выделяющегося в диске из-за вязкости, и заменяя параметры согласно (1.78), получим после решения системы алгебраических уравнений для  $\Pi_{1..4}$  (правой части систе-

мы (1.75)):

$$\begin{aligned}
 z_0/r &= 0.0092 m^{-7/20} \dot{M}_{17}^{1/5} \alpha^{-1/10} R_7^{1/20} f(r)^{1/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{-2/5} \left(\frac{\varkappa_{\Gamma}}{\varkappa_{\Gamma}^*}\right)^{1/10} \Pi_z, \\
 \Sigma_0 &= 5.1 \times 10^3 m^{1/5} \dot{M}_{17}^{3/5} \alpha^{-4/5} R_7^{-3/5} f(r)^{3/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{4/5} \left(\frac{\varkappa_{\Gamma}}{\varkappa_{\Gamma}^*}\right)^{-1/5} \Pi_{\Sigma} [\Gamma/\text{см}^2], \\
 \rho_c &= 2.8 \times 10^{-2} m^{11/20} \dot{M}_{17}^{2/5} \alpha^{-7/10} R_7^{-33/20} f(r)^{2/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{6/5} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{\varkappa_{\Gamma}}{\varkappa_{\Gamma}^*}\right)^{-3/10} \Pi_{\rho} [\Gamma/\text{см}^3], \\
 T_c &= 8.2 \times 10^6 m^{3/10} \dot{M}_{17}^{2/5} \alpha^{-1/5} R_7^{-9/10} f(r)^{2/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{1/5} \left(\frac{\varkappa_{\Gamma}}{\varkappa_{\Gamma}^*}\right)^{1/5} \Pi_T [\text{K}].
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

Комбинации безразмерных параметров  $\Pi_z$ ,  $\Pi_{\Sigma}$ ,  $\Pi_{\rho}$  и  $\Pi_T$  связаны следующим образом с параметрами  $\Pi_{1.4}$ :

$$\begin{aligned}
 \Pi_z &= \Pi_1^{1/2} \Pi_3^{1/10} \Pi_4^{-1/10} \approx 2.6, \\
 \Pi_{\Sigma} &= \Pi_3^{4/5} \Pi_4^{1/5} \approx 0.96, \\
 \Pi_{\rho} &= \Pi_1^{-1/2} \Pi_2^{-1} \Pi_3^{7/10} \Pi_4^{3/10} \approx 0.67, \\
 \Pi_T &= \Pi_3^{1/5} \Pi_4^{-1/5} \approx 1.2.
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

Их величины в зависимости от свободного параметра  $\delta$  показаны на Рис. 1.6 слева. Свободный параметр  $\delta$  определяется выражением (1.76) и может быть оценен из полной оптической толщи диска  $\tau$  и параметров диска следующим образом:

$$\delta = \sqrt{\frac{\kappa_0 \rho_c T_c^{-7/2}}{\varkappa_{\Gamma}}} \tau X(\delta), \tag{1.81}$$

где  $\tau = \varkappa_{\Gamma} \Sigma_0/2$  и численный множитель

$$X(\delta) = \delta \int_{1-1/\delta}^1 (P/P_c)^{1/2} (T/T_c)^{-9/4} d\sigma \sim 2 \tag{1.82}$$

не зависит от абсолютных значений параметров диска и определяется в результате интегрирования уравнений для вертикальной структуры.

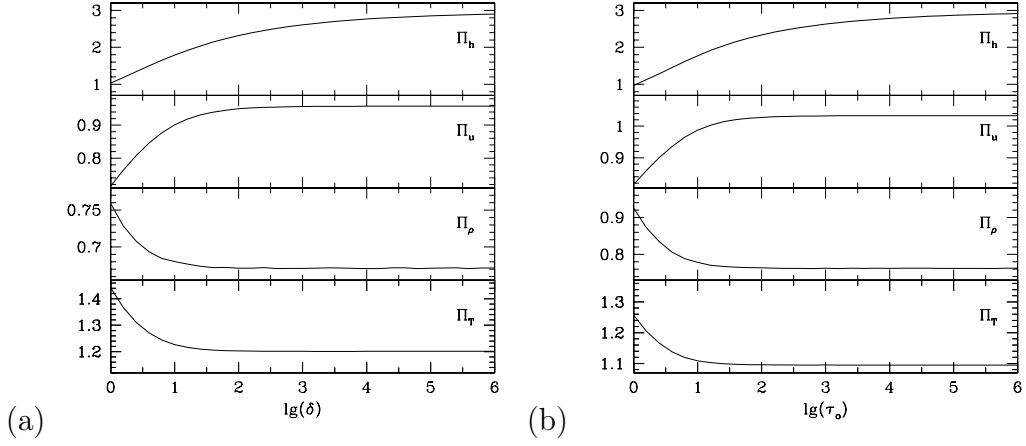


Рис. 1.6: Слева: зависимости безразмерных факторов  $\Pi_z$ ,  $\Pi_\Sigma$ ,  $\Pi_\rho$  и  $\Pi_T$  для зоны В (формулы 1.80). Справа: те же безразмерные факторы для зоны С (формулы 1.86). По горизонтальным осям отложены логарифмы безразмерных параметров, которые характеризуют оптическую толщину диска в каждой зоне. Зависимости заимствованы из [60] и построены для значений из Таблицы 1.1 (графики слева) и Таблицы 1.2 (графики справа).

Значение  $\delta$  может быть найдено рекурсивно с любой точностью, но такой подход будет избыточен в смысле реального применения полученных радиальных зависимостей. Достаточно использовать следующую оценку:

$$\delta = 440 m^{-1/20} \dot{M}_{17}^{1/10} \alpha^{-4/5} R_7^{3/20} f(R)^{1/10} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{21/20} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{-1/5} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{1/2}. \quad (1.83)$$

Вблизи центрального объекта при больших темпах аккреции в диске имеется зона с преобладающей ролью давления излучения (зона А). Радиус, на котором сравниваются давление излучения  $aT_c^4/3$  и давление газа  $\rho_c \mathfrak{K}T_c/\mu$  в плоскости симметрии диска (граница между зонами А и В, [2]), приближенно оценивается как

$$R_{AB} \sim 10^7 m^{1/3} \dot{M}_{17}^{16/21} \alpha^{2/21} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{8/21} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{6/7} \text{ см.} \quad (1.84)$$

Здесь взяты характерные значения безразмерных параметров  $\Pi_{1..4}$  и  $f(r) = 1$ .

При уменьшении темпа аккреции зона В сдвигается по радиусу к центру диска, уступая место зоне С.

**Зона С** Основной вклад в непрозрачность дают процессы поглощения свободно-свободными и связанно-свободными переходами, и газовое давление много больше радиационного. Так же, как и раньше, из правой части системы (1.75) и выражений (1.53) и (1.78), можем найти радиальные зависимости для параметров диска:

$$\begin{aligned}
 z_0/r &= 0.020 m^{-3/8} \dot{M}_{17}^{3/20} \alpha^{-1/10} R_{10}^{1/8} f(r)^{3/20} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{-3/8} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{1/20} \Pi_z, \\
 \Sigma_0 &= 33 m^{1/4} \dot{M}_{17}^{7/10} \alpha^{-4/5} R_{10}^{-3/4} f(r)^{7/10} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{3/4} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{-1/10} \Pi_\Sigma [\Gamma/\text{см}^2], \\
 \rho_c &= 8.0 \times 10^{-8} m^{5/8} \dot{M}_{17}^{11/20} \alpha^{-7/10} R_{10}^{-15/8} f(r)^{11/20} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{9/8} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{-3/20} \Pi_\rho [\Gamma/\text{см}^3], \\
 T_c &= 4.0 \times 10^4 m^{1/4} \dot{M}_{17}^{3/10} \alpha^{-1/5} R_{10}^{-3/4} f(r)^{3/10} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{1/4} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{1/10} \Pi_T [\text{K}],
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Напомним, что  $\dot{M}_{17}$  — нормированный темп аккреции на внутренней границе диска. Для дисков, в которых он равен нулю, формулы преобразуются с учетом  $\dot{M}_{\text{in}}(t) f(r) = F(h, t)/h$ . Заметим, что при  $\dot{M}(r, t) \neq \text{const}$  в формулах (1.79) и (1.85) надо подставлять в качестве темпа аккреции величину на внутренней границе диска. Это удобно, поскольку именно она определяет в большинстве случаев энергетику наблюдаемых аккрецирующих систем.

С учетом записи  $f(r) = F/(\dot{M}_{\text{in}} h)$  формулы (1.79) и (1.85) для радиальных зависимостей в диске могут быть использованы и для описания “мертвых” дисков или “дисков-накопителей” [40], то есть дисков, в которых по каким-то причинам невозможен уход вещества через его внутреннюю границу, то есть  $\dot{M}_{\text{in}} = 0$ . Так как внутренний темп аккреции и  $f(r)$  всегда встречаются в виде произведения в выражениях для физических параметров, во всех формулах их комбинация может быть заменена отношением потока вязких сил к удельному моменту импульса согласно (1.77).

Комбинации безразмерных параметров связаны с параметрами  $\Pi_{1..4}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi_z &= \Pi_1^{19/40} \Pi_2^{-1/20} \Pi_3^{1/10} \Pi_4^{-1/20} \approx 2.6, \\ \Pi_\Sigma &= \Pi_1^{1/20} \Pi_2^{1/10} \Pi_3^{4/5} \Pi_4^{1/10} \approx 1.03, \\ \Pi_\rho &= \Pi_1^{-17/40} \Pi_2^{-17/20} \Pi_3^{7/10} \Pi_4^{3/20} \approx 0.76, \\ \Pi_T &= \Pi_1^{-1/20} \Pi_2^{-1/10} \Pi_3^{1/5} \Pi_4^{-1/10} \approx 1.09,\end{aligned}\tag{1.86}$$

и показаны на Рис. 1.6(b) в зависимости от свободного параметра  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{\varkappa_0 \rho_c}{T_c^{7/2}} \frac{\Sigma_0}{2} = 500 \frac{\dot{M}_{17}^{1/5} f(r)^{1/5}}{\alpha^{4/5}} \left( \frac{\mu}{0.6} \right) \left( \frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*} \right)^{2/5} \frac{\Pi_3^{4/5} \Pi_4^{3/5}}{\Pi_1^{1/5} \Pi_2^{2/5}},\tag{1.87}$$

приблизительно равного

$$\tau_0 \sim 300 \dot{M}_{17}^{1/5} \alpha^{-4/5} \left( \frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*} \right)^{2/5}.\tag{1.88}$$

Полная оптическая толщина диска

$$\tau = \int_0^h \varkappa_0 \rho^2 T^{-7/2} dz\tag{1.89}$$

определяется в процессе численного решения уравнений вертикальной структуры и однозначно зависит от  $\tau_0$  (см. Таблицу 1.2). Приведем также формулу, аппроксимирующую табличные значения с ошибкой меньше 1% при  $\tau_0 > 6$ :

$$\tau \approx 1.042 \tau_0^{1.006}.\tag{1.90}$$

Зависимости параметров в зонах В и С изображены на рис. 1.7 и 1.8. Граница между зонами В и С приблизительно определяется из равенства  $\varkappa_T$  и  $\varkappa_0 \rho T^{7/2}$  в плоскости симметрии диска:

$$R_{BC} \sim 5 \times 10^7 m^{1/3} \dot{M}_{17}^{2/3} \left( \frac{\mu}{0.6} \right)^{-1/3} \left( \frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*} \right)^{-2/3} \left( \frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*} \right)^{4/3} \text{ см}$$

для характерных значений безразмерных параметров  $\Pi_{1..4}$  и  $f(r) = 1$ .

За внешнюю границу зоны С примем радиус, где начинается рекомбинация атомов водорода (при  $T_{\text{eff}} \sim 10^4$  К). При этом в диске развивается тепловая неустойчивость, а в переносе энергии к поверхности начинает



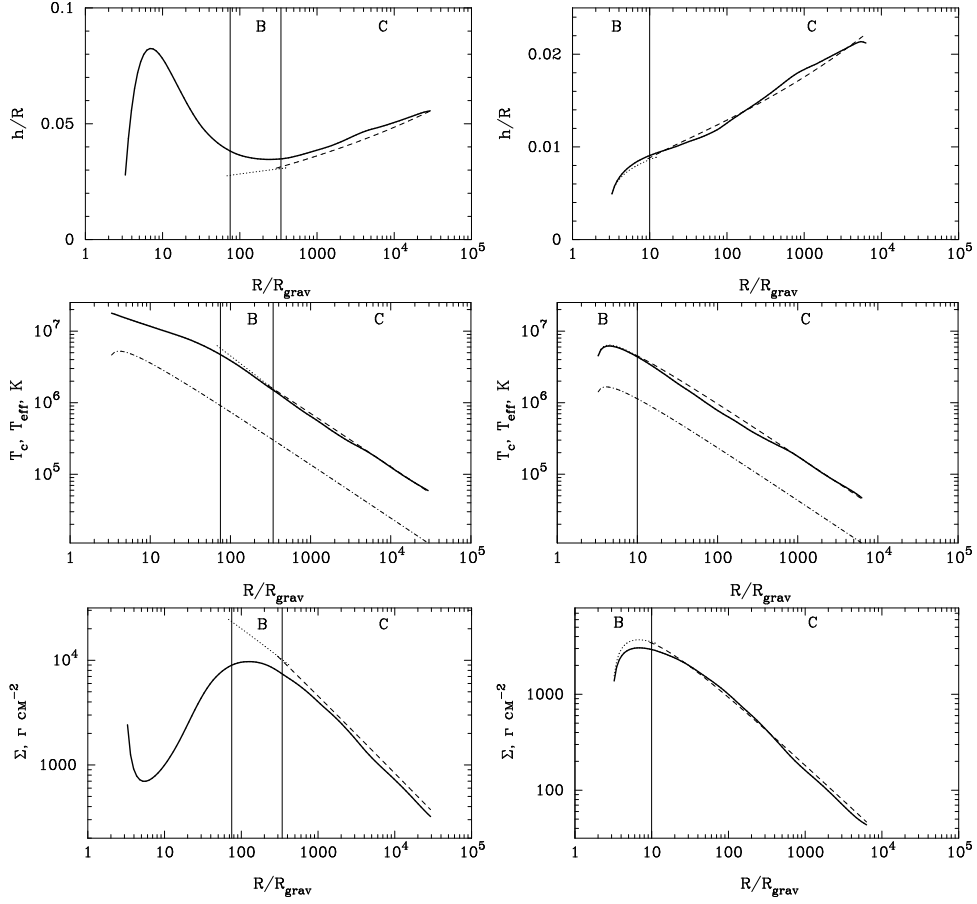


Рис. 1.7: Сверху вниз: относительная полутолщина диска  $z_0/r$ , температура центральная  $T_c$  и эффективная  $T_{\text{eff}}$  (штрих-пунктир), поверхностная плотность  $\Sigma_0$ . Параметры диска:  $m = 10$ ,  $\mu = 0.62$ ,  $\alpha = 0.3$ , слева:  $\dot{M}_{17} = 33.6$  или  $L_{\text{bol}} = 0.2 L_{\text{Edd}}$ , справа:  $\dot{M}_{17} = 0.336$  или  $L_{\text{bol}} = 0.002 L_{\text{Edd}}$ . Сплошная линия — результат численного решения [60], пунктир — формулы (1.79) в зоне В, штриховая линия — формулы (1.85) в зоне С. Рисунки из работы [60].

играть роль конвекция из-за значительного увеличения коэффициента непрозрачности вещества [12, 50]. В тех областях уже нельзя аппроксимировать коэффициент непрозрачности  $\kappa_R$  законом Крамерса. Из условия  $T_{\text{eff}} = 10^4$  К, приравнивая правую часть (1.53) и  $\sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4$ , получим:

$$R_C \approx 1.4 \times 10^{10} m^{1/3} \dot{M}_{17}^{1/3} \text{ см.} \quad (1.91)$$

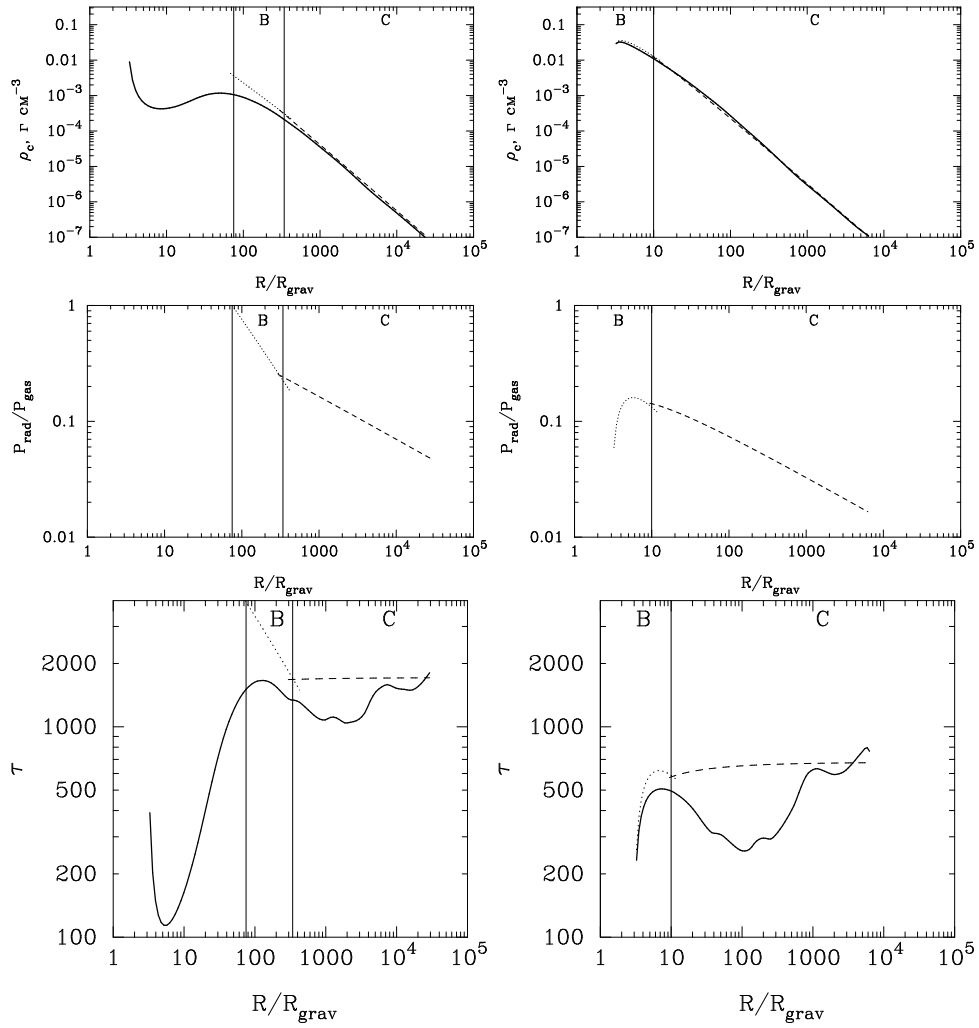


Рис. 1.8: Сверху вниз: плотность в плоскости симметрии  $\rho_c$ , отношение лучистого к газовому давлению, оптическая толщина  $\tau$ . Параметры диска:  $m = 10$ ,  $\mu = 0.62$ ,  $\alpha = 0.3$ , слева:  $\dot{M}_{17} = 33.6$  или  $L_{\text{bol}} = 0.2 L_{\text{Edd}}$ , справа:  $\dot{M}_{17} = 0.336$  или  $L_{\text{bol}} = 0.002 L_{\text{Edd}}$ . Обозначения как на Рис. 1.7. Рисунки из работы [60].

При учете облучения внешних частей диска центральным потоком граница  $R_C$  сдвигается дальше от центра. Это происходит в случае, если поток рентгеновского излучения, падающий на поверхность диска, термализуется в его внешних слоях и нагревает их так, что эффективная

температура поверхности диска не опускается ниже  $\sim 10^4$  К [56].

**Геометрическая толщина диска.** Для часто имеющего интерес интервала значений общих параметров диска величины  $\lg(\delta)$  и  $\lg(\tau_0)$  лежат в пределах от 2 до 4. Для этих значений рассмотренные комбинации из величин  $\Pi_{1,2,3,4}$  практически не меняются с радиусом, и внутри каждой зоны можно использовать характерные значения:

$$\text{(зона В)} \quad \Pi_z \approx 2.6, \quad \Pi_\Sigma = 0.96, \quad \Pi_\rho = 0.67, \quad \Pi_T = 1.2, \quad (1.92)$$

$$\text{(зона С)} \quad \Pi_z \approx 2.6, \quad \Pi_\Sigma = 1.03, \quad \Pi_\rho = 0.76, \quad \Pi_T = 1.09. \quad (1.93)$$

Рассмотрим диск, вещество которого состоит исключительно из водородной плазмы ( $\mu = 0.5$ ), и примем для такой среды величину непрозрачности  $\kappa_R = 6.4 \times 10^{22} \rho T^{-7/2}$  см<sup>2</sup>/г (Като и др. [6]; в работе [2] использована близкая величина), которая определяется только свободно-свободными переходами электронов в плазме. Она на два порядка меньше величины непрозрачности для связанно-свободных переходов  $\kappa_0^*$ , однако результирующее изменение физических величин будет подавлено низкими степенями, в которых коэффициент непрозрачности входит в выражения (1.85). Например, полутолщина диска изменится за счет непосредственного уменьшения  $\kappa_0$  и  $\mu$ , а также  $\Pi_z$ , так как  $\tau_0$  упадет почти в 10 раз (см. (1.87) и рис. 1.6b). Таким образом, получим, что в случае  $\mu = 0.5$  полутолщина диска  $z_0$  на  $\sim 25\%$  меньше, чем при  $\mu = 0.62$ .

Численное решение уравнений вертикальной структуры, описанное в данном разделе, дает бóльшую толщину диска по сравнению с толщиной однородного диска, или так называемым “характерным гидростатическим масштабом”. Последний оценивается как  $v_s/\omega$ , где  $v_s$  — скорость звука в плоскости симметрии. Наличие фактора двойки было указано в [2], оно объясняется неоднородностью распределения плотности и температуры по толщине диска. Точнее, этот фактор порядка  $\Pi_z \sim \sqrt{\Pi_1} \sim 2.5$ , как можно видеть из первой строчки системы (1.75):

$$z_0 = \sqrt{\Pi_1} \sqrt{\frac{\Re T_c}{\mu} \frac{1}{\omega_K}}. \quad (1.94)$$

## 1.6 Нестационарная дисковая аккреция

### 1.6.1 Основное уравнение нестационарной аккреции

Вспышки, наблюдаемые в источниках с аккрецией, например, в двойных системах, в активных ядрах галактик, а также эволюция протопланетных систем представляют особый интерес для исследования. Транзиентные явления могут быть вызваны неустойчивостями разных типов, которые, в общем случае, развиваются на разных временных шкалах. В данном разделе мы обратимся к постановке и решению задачи о нестационарной аккреции в вязком диске. Она необходима для описания транзиентных явлений, которые происходят на масштабах вязких времен вследствие перераспределения момента импульса вещества в диске по направлению от возмущенной конфигурации к стабильной.

В § 1.4.1 были введены величины, проинтегрированные по толщине диска: поверхностная плотность  $\Sigma_0$  (1.36) и  $W_{r\varphi}$  (1.39). Выпишем снова полученные там уравнения сохранения массы и момента импульса (1.37) и (1.38):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_0 v_r r), \\ \Sigma_0 v_r r \frac{\partial (\omega r^2)}{\partial r} &= -\frac{\partial}{\partial r} (W_{r\varphi} r^2). \end{aligned}$$

Подставляя комбинацию  $\Sigma_0 v_r r$  из второй строчки в первую, получаем основное уравнение нестационарной аккреции:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\partial(\omega r^2)/\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (W_{r\varphi} r^2) \right] \quad (1.95)$$

Оно является уравнением диффузионного типа, то есть параболическим уравнением второго порядка в частных производных.

Интегрированная по толщине компонента тензора записывается в рамках градиентной гипотезы переноса момента импульса турбулентными движениями (1.33) следующим образом:

$$W_{r\varphi}(r, t) = 2 \int_0^{z_0} w_{r\varphi} dZ = 3\omega_K \int_0^{z_0} \nu_t \rho dZ. \quad (1.96)$$

Если кинематический коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  не зависит от  $z$ , получаем:

$$W_{r\varphi}(r, t) = \frac{3}{2} \omega_K \nu_t \Sigma_0. \quad (1.97)$$

Введем в качестве новой независимой переменной величину удельного момента импульса  $h(r) = v_\varphi(r) r = \omega r^2$ . Будем обозначать удельный момент импульса свободной частицы, вращающейся в ньютоновском потенциале, величиной  $h_K \equiv \sqrt{GM r}$ . При этом  $dr = 2 h_K dh_K / (GM)$ .

В случае кеплеровского движения уравнение (1.95) с учетом (1.97) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{3}{4} \frac{(GM)^2}{h^3} \frac{\partial^2 (\Sigma_0 \nu_t h)}{\partial h^2}, \quad h \equiv h_K. \quad (1.98)$$

Также рассмотрим альтернативную запись этого уравнения. Она удобна с точки зрения постановки граничных условий для эволюционирующего диска. Также она более подходит для  $\alpha$ -дисков, в моделях которых вязкость параметризуется не коэффициентом  $\nu_t$ , а параметром турбулентности  $\alpha$ , который рассматривается как постоянная величина. Введем величину  $F = 2\pi W_{r\varphi} r^2$ , которая равна полному моменту вязких сил, действующих между соседними кольцами в диске. Для постоянного темпа аккреции в диске, используя для  $W_{r\varphi}$  запись типа (1.42), при условии обращения в ноль вязкого тензора напряжений на внутренней границе,  $W_{r\varphi}(r = r_{\text{in}}) = 0$ , можно записать величину полного момента вязких сил следующим образом:

$$F = \dot{M} \sqrt{GM r} \left( 1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right), \quad \dot{M} = \text{const}. \quad (1.99)$$

Как мы видим,  $F$  линейно пропорциональна удельному моменту импульса  $h = \sqrt{GM r}$  на больших расстояниях.

В новых переменных уравнение переноса момента импульса (1.38) приобретает следующий вид (напомним, что  $v_r$  — отрицательная величина):

$$-2\pi \Sigma_0 v_r r = \dot{M}(r, t) = \left[ \frac{\partial h}{\partial h_K} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial h_K}, \quad (1.100)$$

а уравнение (1.95):

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{(GM)^2}{h_K^3} \frac{\partial}{\partial h_K} \left( \left[ \frac{\partial h}{\partial h_K} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial h_K} \right). \quad (1.101)$$

Для кеплеровского диска по определению  $\partial h / \partial h_K \equiv 1$ .

Метод решения уравнения нестационарной аккреции (1.98) зависит от вида коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_t = \nu_t(r, \Sigma_0)$ . В рамках модели  $\alpha$ -турбулентности, когда вязкий тензор напряжений пропорционален давлению в диске, вид  $\nu_t(r, \Sigma_0)$ , или, другими словами, связь между  $F$  и  $\Sigma_0$ , необходимая для решения (1.101), может быть выведена из уравнений вертикальной структуры, описывающих процессы генерации и переноса энергии.

### 1.6.2 Решения линейного уравнения вязкой эволюции диска

Если  $F$  зависит линейно от поверхностной плотности  $\Sigma_0$ , другими словами,  $\nu_t$  является только функцией радиуса и не зависит от поверхностной плотности, то уравнение (1.98) становится линейным дифференциальным уравнением диффузионного типа. Люст [67] в 1952 г. нашел частные решения для уравнения вязкой аккреции, предложенного его учителем фон Вайцзекером [68], и описал принципы построения общего решения для ограниченной и неограниченной в пространстве задачи.

Для неограниченных в пространстве дисков, Линден-Белл и Прингл [69] в 1974 г. использовали метод суперпозиции частных решений уравнения вязкой эволюции и, в частности, нашли функции Грина для двух типов граничных условий на внутренней границе. С помощью функции Грина можно найти  $F$  или  $\Sigma$  в любой момент времени и в любой точке для произвольного начального условия. Внутренний радиус диска в их решении совпадает с нулевой координатой. Для больших времен зависимости в диске являются автомодельными, темп аккреции через внутреннюю границу падает степенным образом  $\dot{M} \propto t^{-(1+l)}$ , где параметр  $l < 1$ . Прингл в [70] рассмотрел с помощью функций Грина неограниченный диск с центральным притоком момента импульса. Эта задача описывает эволюцию диска, окружающего двойную систему. Аналогичная задача решена в [71], с тем отличием, что внутренняя граница диска расположена на определенном ненулевом радиусе. Кинг и Риттер [72] рассмотрели эволюцию диска с ограниченным внешним радиусом и с постоянным  $\nu_t$  и получили, что темп аккреции падает экспоненциально во времени. Также задача ограниченного диска была рассмотрена с помощью численных методов в [73]. Частный случай функции Грина для

ограниченного диска был построен в работе [74] для нулевого внутреннего граничного условия. Полная функция Грина, которая может быть использована для произвольного начального распределения для двух типов граничных условий, найдена в работе [75]. Там же описана процедура построения решения с ненулевым и переменным темпом аккреции на внешней границе.

Заметим, что во всех таких схемах характерное вязкое время  $\tau_{\text{vis}} \sim r^2/\nu_t$  постоянно во времени.

### 1.6.3 Эволюция вязкого диска неограниченного размера

Приведем основные результаты работы Линден-Белла и Прингла [69]. Запишем кинематический коэффициент вязкости в виде

$$\nu_t = \nu_0 r^b .$$

Тогда связь  $F = 3 \pi h \nu_t \Sigma_0$  (сравните с (1.97)) можно представить следующим образом:

$$F = 3 \pi h \nu_0 \Sigma_0 r^b . \quad (1.102)$$

Для кеплеровского диска ( $h \equiv h_*$ ) уравнение для момента вязких сил (1.98) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{3}{4} \nu_0 h^{2b-2} (GM)^{2-b} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} , \quad (1.103)$$

или, в форме, приближенной к записи Линден-Белла и Прингла,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\kappa}{l} \right)^2 h^{1/l-2} \frac{\partial F}{\partial t} , \quad (1.104)$$

где постоянные параметры связаны следующим образом:

$$\frac{1}{2l} = 2 - b, \quad \kappa^2 = \frac{16 l^2}{3 \nu_0 (GM)^{1/2l}} . \quad (1.105)$$

Общее решение линейного уравнения (1.104) может быть получено разложением по собственным функциям и суперпозицией частных решений. Метод суперпозиции позволяет получить общее решение, удовлетворяющее заданным начальным или краевым условиям. Также в случае линейного уравнения используется метод разделения переменных.

Будем искать частное решение в виде  $F(h, t) = f(h_c \xi) \exp(-st)$ , где  $s$  — некоторая константа, по размерности обратная времени,  $\xi = h/h_c$ , а  $h_c$  — некоторое характерное значение удельного момента импульса вещества в диске. Подставляя такое  $F(h, t)$  в уравнение (1.104), получим преобразованное по методу Ломмеля уравнение Бесселя (см. § 4.31 в [76]):

$$\frac{d^2 f}{dh^2} + \frac{s}{4} \left(\frac{\kappa}{l}\right)^2 h^{1/l-2} f = 0,$$

частным решением которого является

$$f(x) = (kx)^l [A(k) J_l(kx) + B(k) J_{-l}(kx)],$$

где  $J_l$  и  $J_{-l}$  — Бесселевы функции нецелого порядка,  $k^2 = s \kappa^2 h_c^{1/l}$  и  $l$  — константы,  $x = \xi^{1/2l} = (h/h_c)^{1/2l}$ ,  $\xi$  — нормированный удельный момент импульса. Общее решение равно суперпозиции частных решений со всеми такими значениями параметров  $k$ ,  $A(k)$ ,  $B(k)$ , которые обеспечивают выполнение поставленных граничных и начальных условий:

$$F(h, t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{k^2 t}{\kappa^2 h_c^{1/l}}\right) (kx)^l [A(k) J_l(kx) + B(k) J_{-l}(kx)] dk. \quad (1.106)$$

Например, условие  $F(h) = 0$  при  $h = 0$  приведет к обнулению всех коэффициентов при функциях Бесселя с отрицательным индексом:  $B(k) \equiv 0$ .

Был использован следующий метод определения коэффициентов  $A(k)$  и  $B(k)$ . Рассмотрим при  $t = 0$  решение, для которого выполняется условие нулю вязких напряжений в центре  $F(h = 0) = 0$ , записанное с помощью (1.106) в виде

$$F(h, t = 0) = \int_0^\infty (kx)^l A(k) J_l(kx) dk.$$

Воспользуемся теоремой обращения Ханкеля (глава II, теорема 19 в [77], также [76] и [78]) для непрерывных функций  $f(k)$  в виде

$$f(k') = \int_0^\infty x J_l(k'x) \left[ \int_0^\infty k f(k) J_l(kx) dk \right] dx \quad \text{при } l \geq -1.$$



Заменяв  $f(k) = k^{l-1} A(k)$ , видим, что интеграл в квадратных скобках равен  $F(h, t = 0)/x^l$ . Следовательно,

$$(k')^{l-1} A(k') = \int_0^\infty F(h) J_l(k' x) x^{1-l} dx, \quad (1.107)$$

где  $F_0(h) \equiv F(h, t = 0)$ . Отсюда можно определить коэффициенты  $A(k')$ .

Если задано начальное распределение  $F_0(h)$ , то решение линейного дифференциального уравнения (1.104) может быть построено как

$$F(h, t) = \int_0^\infty G(h, h_1, t) F_0(h_1) dh_1,$$

где  $G$  — функция Грина, которая является решением уравнения (1.104) во всех точках, когда  $h \neq h_1$  и  $t \neq 0$ , и для которой в физически реализуемых системах выполняется:  $G = 0$  при  $t < 0$ . Можно рассматривать уравнение (1.104) как линейную систему с входным сигналом  $F_0(h_1)$  и выходным сигналом  $F(h, t)$ , для которой функция Грина имеет роль “весовой функции”. Как хорошо известно, сама функция Грина является “откликом” системы на единичный импульсный входной сигнал, — то есть является решением уравнения (1.104), если начальное условие представляет собой  $\delta$ -функцию Дирака:

$$F_0 = \delta(x - x_1); \quad F(h, t) = G(x, x_1, t).$$

Подставляя начальное распределение в (1.107), находим выражение для  $A(k)$ :

$$A(k) = (k x_1)^{1-l} J_l(k x_1).$$

Для получения функции Грина подставим  $A(k)$  в выражение (1.106):

$$G(x, x_1, t) = x^l x_1^{1-l} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{k^2 t}{\kappa^2 h_c^{1/l}}\right) k J_l(k x_1) J_l(k x) dk.$$

Интеграл находится с использованием таблиц интегральных преобразований Ханкеля:

$$G(x, x_1, t) = \frac{\kappa^2 h_c^{1/l} x^l x_1^{1-l}}{2t} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x^2}{4t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right) I_l\left(\frac{x x_1}{2t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right), \quad (1.108)$$

где  $I_l$  — модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда). На Рис. 1.9 показана функция Грина в четыре момента времени.

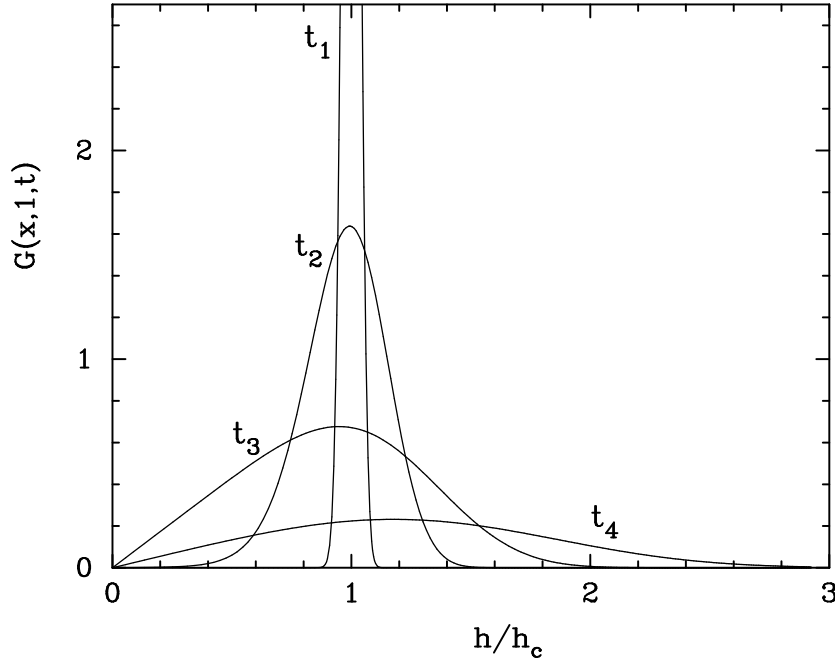


Рис. 1.9: Функция Грина (1.108), найденная в [69], в четыре момента времени:  $t_1 = 0.001$ ,  $t_2 = 0.03$ ,  $t_3 = t_{\max} = 0.1875$  и  $t_4 = 1$ . Параметры решения  $\kappa = 1$ ,  $h_c = 1$ ,  $l = 1/3$ ,  $x_1 = 1$ .

Зададим начальное распределение  $F_0$  в виде функции Дирака с физически обоснованной нормировкой. Пусть начальная конфигурация представляет из себя узкое кольцо на радиусе  $r_s$  с полной массой  $M_0$ . Удельный момент импульса на этом радиусе равен  $h_s = x_s^{2l} h_c$ . Запишем поверхностную плотность при  $t = 0$  как  $\Sigma_0(h, t = 0) = M_0 \delta(r - r_s) / 2\pi r_s$ . С учетом (1.102) и (1.105) получим для ранее введенной переменной  $x = (h/h_c)^{1/2l}$ :

$$F_0(x) = 2l M_0 h_c^{1-1/l} \kappa^{-2} x_s^{2l-1} \delta(x - x_s) .$$

Здесь использовалось равенство  $\delta(x - x_s) dx = \delta(r - r_s) ds$ . Эволюция

этого узкого кольца определяется с помощью найденной функции Грина:

$$F(x, t) = \int_0^{\infty} F_0(x_1) G(x, x_1, t) dx_1$$

и выражается в явном виде

$$F(x, t) = \frac{M_0 h_c l (x x_s)^l}{t} \exp\left(-\frac{x_s^2 + x^2}{4t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right) I_l\left(\frac{x x_s}{2t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right). \quad (1.109)$$

Рассмотрим темп аккреции на внутренней границе  $\dot{M}_{\text{in}} = (\partial F / \partial h)|_{h \rightarrow 0}$ :

$$\dot{M}_{\text{in}}(t) = \frac{x^{1-2l}}{2l h_c} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{M_0 \tau_e^l}{\Gamma(l)} \frac{e^{-\tau_e/t}}{t^{1+l}}.$$

Его можно записать через пиковое значение

$$\dot{M}_{\text{in}}(t) = \dot{M}_{\text{in,max}} \left(\frac{\tau_{\text{pl}}}{t}\right)^{1+l} e^{-\tau_e/t},$$

где мы ввели характерное время экспоненциального роста  $\tau_e$  и степенного падения  $\tau_{\text{pl}}$ :

$$\tau_e = \frac{\kappa^2 h_s^{1/l}}{4} = \frac{1+l}{e} \tau_{\text{pl}}.$$

Темп аккреции достигает пикового значения

$$\dot{M}_{\text{in,max}} = \frac{M_{\text{disk}}}{t_{\text{max}}} \frac{(1+l)^l}{e^{1+l} \Gamma(l)} \quad (1.110)$$

в момент времени

$$t_{\text{max}} = \frac{\kappa^2 h_s^{1/l}}{4(1+l)} = \frac{\tau_{\text{pl}}}{e}. \quad (1.111)$$

#### 1.6.4 Решение для диска с фиксированным внешним радиусом

Граничные условия имеют важное значение для вида решения уравнения (1.103). Выше мы рассмотрели решение, в котором диск неограниченно увеличивается в своих размерах. Часть вещества в диске приобретает со временем очень большие значения удельного момента импульса.

В ряде астрофизических ситуаций ясно, что необходимо устанавливать условия на конечном радиусе от центра. Основным таким случаем являются диски в двойных системах. Момент приливных сил, возникающих благодаря гравитационному влиянию звезды-компаньона и действующий преимущественно в узкой области внутри полости Роша, приводит к “обрезанию” диска на некотором радиусе [79, 80, 81, 82]. В этой области происходит перевод момент импульса диска в орбитальное движение двойной системы.

Таким образом, задача теперь ставится на конечном интервале. Метод суперпозиции частных решений модифицируется, и общее решение находится не как интеграл (1.106), а как сумма всех частных решений, удовлетворяющих конкретным граничным условиям [67]:

$$F(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t k_i^2 \kappa^{-2} h_{\text{out}}^{-1/l}} (k_i x)^l [A_i J_l(k_i x) + B_i J_{-l}(k_i x)], \quad (1.112)$$

Здесь мы также заменили характерное значение удельного момента импульса на его значение на внешней границе  $h_{\text{out}}$ , где безразмерное  $x = 1$ .

Зададим граничное условие на внешнем радиусе диска:

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \dot{M}_{\text{out}}(t) \quad \text{при} \quad h = h_{\text{out}}. \quad (1.113)$$

В простейшем случае, если  $\dot{M}_{\text{out}}(t) = 0$ , это будет однородное граничное условие. На внутренней границе рассмотрим такое же условие, как и раньше:  $F(h) = 0$  при  $h = 0$ . Использование этих двух условий дает выражение, которому должно удовлетворять каждое частное решение, то есть для любого  $k$

$$l J_l(k_i) + k_i J'_l(k_i) = 0. \quad (1.114)$$

Поскольку в ряду, представляющем собой общее решение, остались только члены с функциями Бесселя с положительными индексами, в начальный момент  $t = 0$  общее решение (1.112) представляется в виде:

$$F(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} (k_i x)^l A_i J_l(k_i x). \quad (1.115)$$

Ряды вида  $\sum_{i=1}^{\infty} k_i^l A_i J_l(k_i x)$  с условием (1.114) называются рядами Дини [см. 76, §18.11]. Функция  $f(x) = F(x, 0) x^{-l}$  может быть разложена в ряд Дини, если она удовлетворяет условиям Дирихле на данном интервале, а коэффициенты разложения могут быть найдены как

$k_i^l A_i = 2 \bar{f}_J(k_i) J_l^{-2}(k_i)$  [76, 77], где использовано конечное преобразование Ханкеля

$$\bar{f}_J(k_i) = \int_0^1 x f(x) J_l(k_i x) dx .$$

Для поиска функции Грина, мы ищем решение для начального условия в форме  $\delta$ -функции:  $F(x, 0) = \delta(x - x_1)$ . Используя ее свойства, подставляя  $f(x)$  в последнее выражение, получаем:

$$k_i^l A_i = 2 x_1^{1-l} \frac{J_l(k_i x_1)}{J_l^2(k_i)} . \quad (1.116)$$

Таким образом, получаем функцию Грина для ограниченного диска [75]:

$$G(x, x_1, t) = 2 x^l x_1^{1-l} \sum_i e^{-t k_i^2 \kappa^{-2} h_{\text{out}}^{-1/l}} \frac{J_l(k_i x_1) J_l(k_i x)}{J_l^2(k_i)} , \quad (1.117)$$

где  $k_i$  — положительные корни трансцендентного уравнения (1.114),  $x = (h/h_{\text{out}})^{1/2l}$ . Функция Грина изображена на Рис. 1.10 для нескольких значений времени. Кривая в момент  $t_3 = t_{\text{max}}$  (см. (1.111)) соответствует максимальному темпу аккреции через внутреннюю границу диска.

Если задать начальное распределение  $F(x, 0)$ , то распределение в любой момент  $t > 0$  находится как

$$F(x, t) = \int_0^1 F(x_1, 0) G(x, x_1, t) dx_1 . \quad (1.118)$$

Темп аккреции в любой момент  $t > 0$

$$\dot{M}(x, t) = \int_0^1 F(x_1, 0) G_{\dot{M}}(x, x_1, t) dx_1 / h_{\text{out}} , \quad (1.119)$$

где функция Грина для темпа аккреции

$$\begin{aligned} G_{\dot{M}}(x, x_1, t) &\equiv \frac{\partial G(x, x_1, t)}{\partial x^{2l}} = \\ &= \frac{(x x_1)^{1-l}}{l} \sum_i e^{-t k_i^2 \kappa^{-2} h_{\text{out}}^{-1/l}} k_i \frac{J_l(k_i x_1) J_{l-1}(k_i x)}{J_l^2(k_i)} . \end{aligned} \quad (1.120)$$

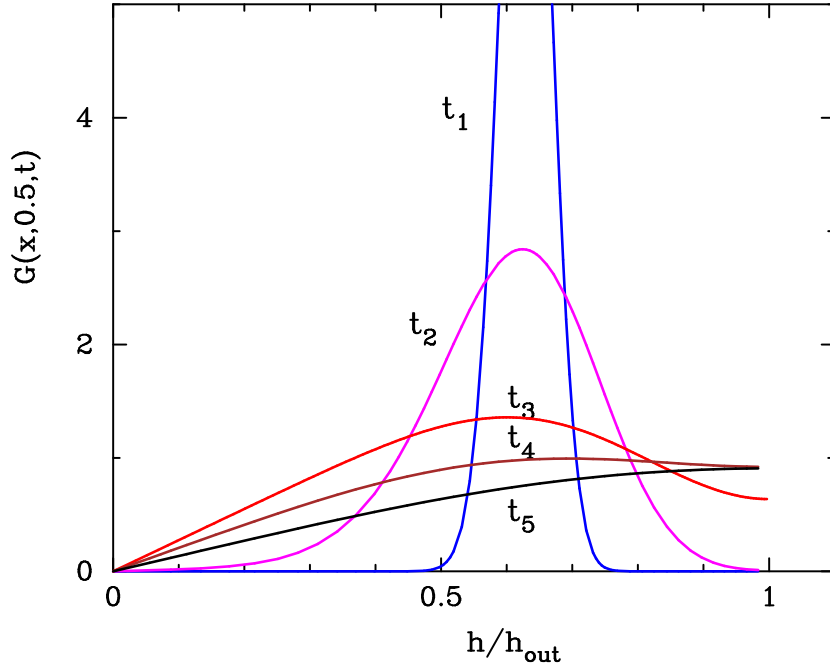


Рис. 1.10: Функция Грина ограниченного диска с нулевым тензором вязких напряжений в центре в моменты времени  $t_1 = 0.001$ ,  $t_2 = 0.01$ ,  $t_3 = t_{max}^\infty = 3/64$ ,  $t_4 = 0.1$ ,  $t_5 = 0.3$ . Кольцо вещества в момент  $t = 0$  находилось в  $x_s = (h/h_{out})^{1/2l} = 0.5$ . Параметры  $\kappa = 1$ ,  $l = 1/3$ .

Функции  $G$  и  $G_{\dot{M}}$  для случая  $x_1 = 1$  найдены в виде аналитической асимптотики в работе [74].

Начальное распределение  $F$  можно выразить из распределения поверхностной плотности, используя (1.102) и (1.105):

$$F(x, 0) = \frac{16 \pi l^2}{\kappa^2 h^{1/l}} r^2 \Sigma(r) h, \quad (1.121)$$

где  $r = h^2/GM$  и  $h = h_{out} x^{2l}$ .

На больших временах первый член в сумме (1.120) доминирует, и временная зависимость от времени выражается простой экспонентой:

$$G_{\dot{M}}(0, x_1, t) \Big|_{t > t_{vis}} = \frac{k_1^l x_1^{1-l}}{2l \Gamma(l)} \frac{J_l(k_1 x_1)}{J_l^2(k_1)} \exp\left(-\frac{t k_1^2}{2l t_{vis}}\right).$$

Характерное время экспоненциального уменьшения темпа аккреции рав-

Таблица 1.3: Параметры функции Грина в решении для нестационарного диска. Столбцы: Степень в законе  $\nu \propto r^b$ ;  $l$  из выражения (1.105); Первый ноль уравнения (1.114); Числовой множитель из (1.111) Числовой множитель из (1.122); Параметр, описывающий радиальный профиль,  $a_0 = \dot{M}_{\text{in}} h_{\text{out}}/F_{\text{out}}$ ; Для  $\alpha$ -дисков решение линейного уравнения может применяться только на временах порядка вязкого времени. Для  $\alpha$ -дисков указан тип непрозрачности.

$b$	$l$	$k_1$	$t_{\text{max}}(r_s^2/\nu_s)^{-1}$	$t_{\text{exp}}(r_{\text{out}}^2/\nu_{\text{out}})^{-1}$	$a_0$	Комментарий
0	1/4	1.0585	1/15	0.298	1.267	$\nu = \text{const}$
1/2	1/3	1.2430	1/9	0.383	1.363	$\alpha$ -диски при $h/r = \text{const}$
3/5	5/14	1.2927	0.125	0.407	1.392	$\alpha$ -диск, $\tau_{\text{T}} \gg \tau_{\text{ff}}$
3/4	2/5	1.3793	0.152	0.449	1.444	$\alpha$ -диск, $\tau_{\text{ff}} \gg \tau_{\text{T}}$
1	1/2	1.5708	2/9	0.540	1.571	$F(h) \propto \sin((\pi/2)h/h_{\text{out}})$
2	$\infty$	—	—	—	—	$t_{\text{vis}}$ не зависит от $r$

НО

$$t_{\text{exp}} = h_{\text{out}}^{1/l} \frac{\kappa^2}{k_1^2} = \frac{16l^2}{3k_1^2} \frac{r_{\text{out}}^2}{\nu_{\text{out}}}, \quad (1.122)$$

где мы учли, что  $\nu_{\text{out}} = \nu_0 r_{\text{out}}^b$ . В Таблице 1.3 приведены значения  $k_1$  первых нулей уравнения (1.114) для типичных значений  $l$ . Также в Таблице даны коэффициенты для вычисления характерных времен роста (1.111) и экспоненциального спада (1.122).

Диск становится квазистационарным (т.е. темп аккреции почти не меняется с радиусом) в областях, где  $r/r_{\text{out}} < (t/t_{\text{exp}})^{2/l}$ . Установление квазистационарности в центральных областях диска за вязкое время является общим свойством для дисков с любыми типами вязкости.

Известно, что в самых простых случаях вспышки в рентгеновских новых (двойные системы с компактным объектом и маломассивной оптической звездой) представляют собой кривые с быстрым ростом и экспоненциальным спадом, так называемые кривые типа FRED <sup>7</sup> [83]. Такие кривые блеска хорошо воспроизводятся в рамках модели вязкого диска с постоянным коэффициентом вязкости на временах порядка  $t_{\text{vis}}$  (Рис. 1.11). Это объясняется тем, что на временах порядка одного-двух  $t_{\text{vis}}$  нестационарные модели  $\alpha$ -диска и диска, рассмотренного в настоящем разделе, дают близкие друг к другу результаты.

Для аппроксимации эволюции вязкого  $\alpha$ -диска решением с постоянной вязкостью необходимо оценить наиболее подходящий параметр  $b$  для

<sup>7</sup>fast-rise exponential decay (англ.)

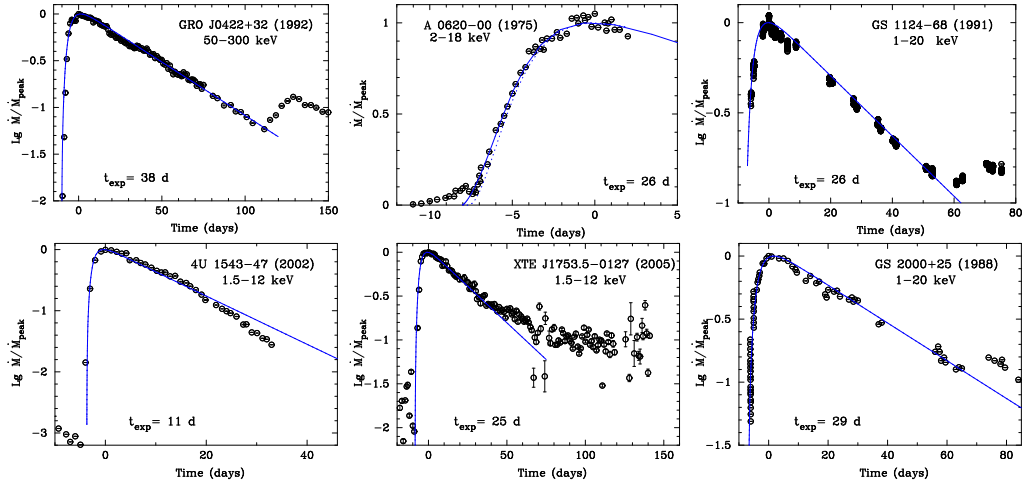


Рис. 1.11: Нормированные рентгеновские кривые блеска рентгеновских новых GRO J0422+32 (1992), A 0620-00 (1975), GS 1124-68 (1991), GS 2000+25 (1998) из [83] и 4U 1543-47 (2002) и XTE J1753.5-0127 (2005) (результаты спутника ASM/RXTE). Рентгеновские диапазоны указаны для каждой вспышки. Сплошная кривая — нормированный на максимум темп аккреции через внутреннюю границу диска, рассчитанный по формуле (1.119) для  $l = 2/5$  и времени  $t_{\text{exp}}$ , значение которого указано для каждой кривой. Начальное распределение поверхностной плотности в диске  $\Sigma \propto r$ , начальный внутренний радиус горячей зоны  $0.01 \times r_{\text{out}}$ . Для A 0620-00 нарисованы две модели, внутренний радиус при  $t = 0$   $0.001 \times r_{\text{out}}$  (сплошная линия) и  $0.3 \times r_{\text{out}}$  (пунктир). Рисунок из работы [75].



уравнения (1.103). Это можно сделать, учтя соотношение (1.35) между кинематической вязкостью и параметром турбулентности:

$$\nu_t = \nu_0 r^b \simeq \frac{2}{3} \alpha \omega_K r^2 \left( \frac{z_0}{r} \right)^2. \quad (1.123)$$

Решение для стационарного диска с доминирующим давлением газа в режиме непрозрачности по Крамерсу дает  $z_0/r \propto r^{1/8}$  (см. (1.85)), следовательно,  $b \simeq 3/4$  или, равносильно,  $l \simeq 2/5$ , если пренебрегать зависимостью полутолщины диска от темпа аккреции.

### 1.6.5 Решения нелинейного уравнения эволюции вязкого $\alpha$ -диска

Ранее мы рассмотрели случай, когда коэффициент кинематической вязкости зависит только от радиальной координаты в диске. В более общем случае можно представить  $\nu_t$  в виде степенной функции от  $\Sigma$  и  $r$ . Такая зависимость, в частности, возникает, если рассматривать диски с  $\alpha$ -вязкостью. При этом уравнение (1.98) становится нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Для поиска решений таких уравнений в ряде случаев могут быть использованы методы подобию. Автомодельное решение описывает поведение решения нелинейного дифференциального уравнения после прохождения достаточно большого времени с момента начальных условий.

Как мы видели в предыдущем разделе, автомодельные решения линейного дифференциального уравнения характеризуются возможностью полного разделения временной и координатной частей решения: частное решение является произведением функций от единственной координаты. В случае нелинейного дифференциального уравнения такое простое разделение в общем случае не применимо. Для упрощения задачи используется метод введения новых безразмерных переменных (параметров), которые являются комбинацией размерных параметров (времени и координат) в различных степенях.

Автомодельные решения нелинейных дифференциальных уравнений разделяют на два типа [84, 85]. Первый тип, - так называемая полная автомодельность, - реализуется, когда в задаче вид автомодельных функций и вид новой безразмерной переменной может быть выведен из анализа размерностей. Второй тип, - неполная автомодельность, - это более общий случай; вид автомодельной функций является частным решением

самой задачи (нелинейной задачи на собственные значения, см. [86]), анализ размерностей не позволяет определить ее вид, и, в частности, найти степени, в которых размерные параметры входят в состав безразмерного параметра. При неполной автомодельности вид решения зависит от значений автомодельных переменных.

Если постоянные коэффициенты в автомодельных функциях можно найти из законов сохранения, то автомодельное решение будет относиться к первому типу (например, сохранение энергии в задаче Дж.И.Тейлора о взрыве (см. [85]), сохранение полного момента импульса в аккреционном диске (см. § 1.6.6 далее)). Автомодельные решения первого рода были найдены для аккреционных дисков с нелинейным уравнением вязкой диффузии на той стадии эволюции, когда темп аккреции уменьшается [70, 87]. Также были построены автомодельные решения второго рода [88], — на более раннем эволюционном этапе, если рассматривать эволюцию диска из кольца вещества вокруг гравитирующего центра.

Вид параметра турбулентности  $\nu_t$  определяется физической структурой диска, которая зависит от астрофизических условий. Для  $\alpha$ -диска с двумя вариантами непрозрачности (непрозрачность по Крамерсу и томсоновское рассеяние) в рамках автомодельного решения первого типа было найдено, что темп аккреции уменьшается как  $\propto t^{-19/16}$  и  $\propto t^{-5/4}$ , соответственно [70, 87, 88, 89, 90]. Лин и Прингл [91] рассмотрели молекулярный диск с гравитационной неустойчивостью, порождающей эффективную вязкость  $\nu_t \propto \Sigma^2 r^{9/2}$ , и нашли что  $\dot{M} \propto t^{-6/5}$ . Лин и Боденхаймер [92] исследовали эволюцию протопланетного диска под действием конвективной турбулентной вязкости ( $\nu_t \propto \Sigma^2$ ), для которого  $\dot{M} \propto t^{-15/14}$ . Огилви [93] исследовал аккреционный адвективный поток, структура которого существенно отличается от тонкого вязкого диска, и методами подобия также нашел решения для сохраняющегося полного момента импульса.

Вид решения зависит и от граничных условий. Прингл [70] рассмотрел общие свойства неограниченного холодного протозвездного диска с  $\nu_t \propto \Sigma^3$  с центральным источником углового момента. Такая постановка задачи соответствует эволюции диска вокруг молодой двойной системы (см. также [94]). В работе [95] подробно разобрана эволюция дисков вокруг двойных черных дыр и получены автомодельные решения с различными условиями на внутренней границе, предполагающими некоторый перенос массы через внутреннюю границу. Для диска со стандартным условием на внутренней границе, — тензор вязких напряжений обраща-

ется в ноль (или становится очень малым), — но внешний радиус которого ограничен, в [96] получено, что  $\dot{M} \propto t^{-10/3}$  для Крамеровской непрозрачности и  $\dot{M} \propto t^{-5/2}$  для томсоновского рассеяния (см. §1.6.7 ниже).

Если  $\nu_t = \nu_0 \Sigma^a r^b$ , следовательно, коэффициент кинематической вязкости не постоянен во времени, так как меняется поверхностная плотность. Связь  $F = 3\pi h \nu_t \Sigma_0$  (ср. с (1.97)) можно представить следующим образом:

$$F = 3\pi h \nu_0 \Sigma_0^{a+1} r^b. \quad (1.124)$$

Тогда для кеплеровского диска ( $h \equiv h_*$ ) уравнение (1.98) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \frac{F^m}{h^n} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}, \quad (1.125)$$

где  $D$  — размерная константа,

$$D = \frac{a+1}{2} (GM)^2 \left( \frac{3}{2} \frac{\nu_0}{(2\pi)^a (GM)^b} \right)^{1/(a+1)}, \quad (1.126)$$

$m$  и  $n$  — безразмерные константы,

$$m = \frac{a}{a+1}, \quad n = \frac{3a+2-2b}{a+1}.$$

Значения параметров  $D$ ,  $m$ ,  $n$  могут быть определены из уравнений вертикальной структуры. Величину  $D$  в (1.125) можно рассматривать как своеобразный “коэффициент диффузии”. Он может быть получен из связи между  $\Sigma_0$ ,  $F$  и  $h$  [88, 89]:

$$\Sigma_0 = \frac{(GM)^2 F^{1-m}}{2(1-m) D h^{3-n}}. \quad (1.127)$$

Из сравнения видов уравнения в линейном и нелинейном случаях, (1.104) и (1.125), получаем, что  $D = 4(l/\kappa)^2$  при  $m = 0$ .

Нелинейная задача нестационарной аккреции имеет следующие отличительные особенности. Во-первых, существование автомодельных решений II рода возможно только при  $m \neq 0$ . Во-вторых, автомодельное решение I рода на третьей стадии, хотя и существует при  $m = 0$ , однако имеет характерный для линейных задач экспоненциальный профиль при

$r \rightarrow \infty$  (см., например, Линден-Белл и Прингл, 1974), в то время как при  $m \neq 0$  границы диска вполне определены<sup>8</sup>.

**$\alpha$ -ДИСКИ**

Любарский и Шакура [88] записали уравнения вертикальной структуры в виде, аналогичном (1.75), а непрозрачность задали в виде (1.70):

$$\kappa = \kappa_0 \frac{\rho^\varsigma}{T^\Upsilon} .$$

После некоторых алгебраических преобразований с уравнениями из правого столбца (1.75) можно найти связь между  $\Sigma_0$ ,  $W_{r\varphi} r^2$  и  $\omega r^2$ , которая с учетом (1.127) дает<sup>9</sup>:

$$D = \frac{1}{4(1-m)(2\pi)^m} \left\{ \frac{2^{6+\varsigma+2\Upsilon} \alpha^{8+\varsigma+2\Upsilon}}{\Pi_1^\varsigma \Pi_2^{2\varsigma} \Pi_3^{8+\varsigma+2\Upsilon} \Pi_4^2} \left( \frac{\Re}{\mu} \right)^{8+2\Upsilon} \left( \frac{9\kappa_0}{8ac} \right)^2 (GM)^{12+8\varsigma} \right\}^{\frac{1}{10+3\varsigma+2\Upsilon}} , \quad (1.128)$$

где

$$\varsigma = -\frac{11m - 2n - 2}{7m - n - 1} , \quad \Upsilon = -\frac{1}{2} \frac{37m - 4n - 10}{7m - n - 1} \quad (1.129)$$

или

$$m = \frac{4 + 2\varsigma}{10 + 3\varsigma + 2\Upsilon} , \quad n = \frac{12 + 11\varsigma - 2\Upsilon}{10 + 3\varsigma + 2\Upsilon} \quad (1.130)$$

(см. Таблицу 1.4).

Необходимо заметить, что “коэффициент диффузии”  $D$  слабо зависит от коэффициента непрозрачности: в степени  $1/5$  или  $1/10$  от  $\kappa_0$ . Это уменьшает влияние неопределенности, заложенной в зависимости реальной непрозрачности от параметров диска. Значение комбинации параметров  $\Pi_{1,2,3,4}$  в (1.128) слабо зависит от оптической толщи  $\tau$ , то есть от радиуса в диске (см. Таблицы 1.1, 1.2). Таким образом,  $D$  может рассматриваться как константа в основном уравнении нестационарной аккреции (1.125).

<sup>8</sup>Отмеченное свойство аналогично тому, которое возникает в задачах теплопроводности, когда с учетом нелинейности граница тепловой волны резко отделяет прогретую зону от остальной области (Зельдович и Райзер [86]).

<sup>9</sup>Отметим, что здесь  $F$  в  $2\pi$  раз больше, чем в статье Любарского–Шакуры [88], Одновременно величина  $D$  у нас меньше в  $(2\pi)^m$  раз.

Таблица 1.4: Безразмерные параметры в уравнениях нестационарной аккреции для разных  $\nu_t$ . Параметр  $\alpha_{pl}$  – степень временной зависимости на стадии спада аккреции в неограниченном диске:  $\dot{M} \propto t^{\alpha_{pl}}$ .

	$m$	$n$	$a$	$b$	$\zeta$	$\Upsilon$	$\alpha_{pl}$
$\kappa_T \gg \kappa_{ff}$ и (1.70)	2/5	6/5	2/3	1	0	0	-19/16
$\kappa_{ff} \gg \kappa_T$ и (1.70)	3/10	4/5	3/7	15/14	1	7/2	-5/4
ORAL [63], полная ионизация H и He	1/3	1	1/2	1	1	5/2	-11/9
конвективная турбу- лентность [92]	2/3	8/3	2	0	—	—	-15/14
молекулярный диск с гравитационной неустойчивостью [91]	2/3	-1/3	2	9/2	—	—	-6/5

### 1.6.6 Эволюция $\alpha$ -диска из кольца вещества

Как оказалось, глобальная эволюция диска обычно может быть разделена на три стадии: (1) стадия формирования диска из начального кольца, сформированного из выброшенного на некотором радиусе вещества, (2) при фиксированной внутренней границе установление квазистационарного распределения параметров в диске и, как частный случай, рост аккреции на центральное тело, (3) “расплывание диска” от центра, которое сопровождается уменьшением темпа аккреции.

В двойной звездной системе кольцо вещества может образоваться вследствие кратковременного выброса вещества с соседней компоненты. При наличии эффективных механизмов вязкости дифференциально вращающееся кольцо начнет расползаться в диск. Если вместо однократного выброса массы в двойной системе в некоторый момент времени начинается квазистационарное перетекание вещества с соседней компоненты, то первые две стадии будут описывать процесс выхода диска на квазистационарный режим с темпом аккреции, равным скорости втекания вещества в диск.

На первой стадии вещество с внутреннего края тора, отдавая момент импульса внешним кольцам, начнет двигаться к центру, и в области  $r \ll R_{out}$  течение выходит на некоторый автомодельный режим, характеристики которого не зависят от профиля начального распределения

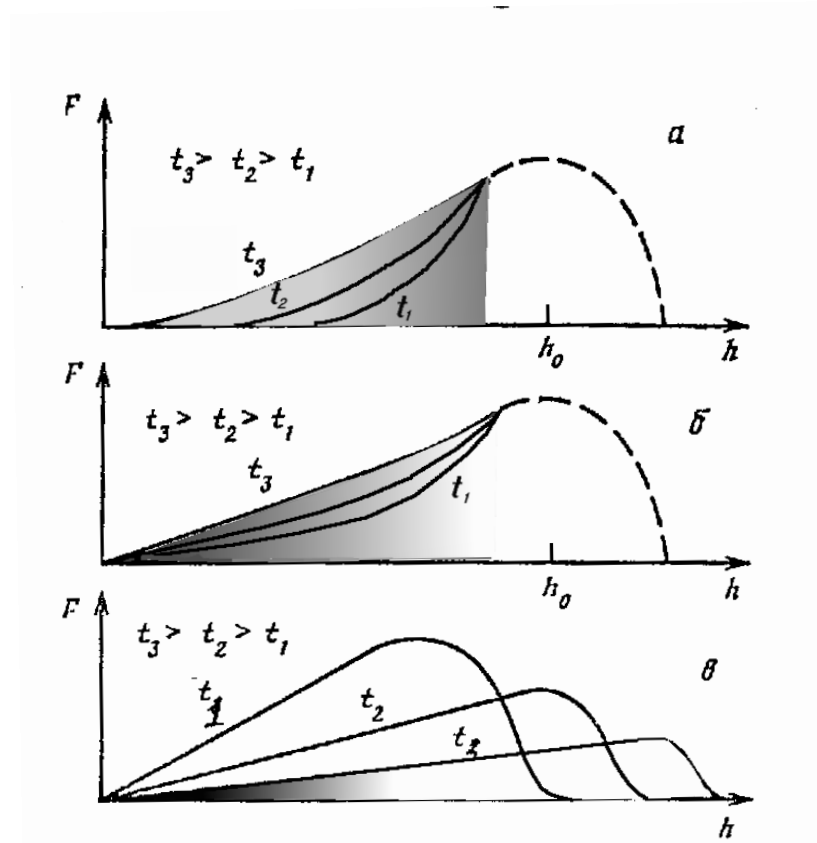


Рис. 1.12: Иллюстрация из работы [88] процесса эволюции нестационарной дисковой аккреции в виде зависимости момента вязких сил, действующих между соседними кольцами нестационарного диска, от удельного момента количества движения: а — стадия формирования и движения к центру автомодельного “языка”, б — стадия формирования квазистационарного режима, в — стадия затухания аккреции. Штриховой линией обозначены области, где вещество было выброшено и решение в которых имеет неавтомодельный характер. На каждом рисунке показаны распределения для трех последовательных моментов времени  $t_1, t_2, t_3$ . Рассчитанные зависимости показаны на Рис. 1.14 и 1.15.

вброшенной массы. Внутренний край диска, имеющий форму вытягивающегося “языка”, за конечное время достигнет центра аккреции (Рис. 1.12, а). Вблизи радиуса последней устойчивой орбиты, — при вращении вокруг черной дыры, или вблизи магнитосферы, фотосферы автотомодельное решение не применимо; тем не менее, после некоторого переходного этапа, аккреция вновь выходит на еще одно автотомодельное решение — режим квазистационарной аккреции (вторая стадия).

На второй стадии во внутренних областях диска быстро (в силу малости характерных вязких времен на малых радиусах) устанавливается квазистационарное распределение с практически постоянным по радиусу темпом аккреции. При этом темп аккреции растет со временем. Эта область отделена некоторой переходной зоной от внешних областей, где никакие изменения еще произойти не успевают, и распределение всех физических величин должно остаться тем же, каким оно было вначале. Постепенно область, занимаемая квазистационарным решением, будет расширяться (Рис. 1.12, б).

Далее диск постепенно выходит на заключительный, третий этап своей эволюции (стадия затухания аккреции, Рис. 1.12, в), на котором “забываются” детали начального распределения, и для нахождения автотомодельного решения важны только некоторые сохраняющиеся при аккреции интегральные величины. Эта заключительная стадия описывается автотомодельным решением I рода, в то время как предыдущие — автотомодельными решениями II рода, то есть решениями, в которых показатель автотомодельности определяется не из соображений размерности, а находится в процессе интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения для функции-представителя [97].

Итак, на каждой стадии возникают такие движения, отличительным свойством которых является подобие, сохраняющееся в самом движении. Это означает, что распределение какой-либо величины, например момента вязких сил, можно представить в виде

$$F(h, t) = h^{A_1} t^{A_2} f(C h^{A_3} t^{A_4}), \quad (1.131)$$

где  $f$  — функция единственной автотомодельной переменной. Параметры  $C, A_{1..4}$  могут быть определены из соображений размерности или из законов сохранения для полностью автотомодельных решений. Для неполностью автотомодельных решений определение значений параметров, или части из них, требует решения нелинейной задачи и, кроме того, найденные параметры зависят от  $h$  и  $t$ .

### Стадия формирования языка

Предположим, что внутренний край диска  $r_{\text{in}}$  или эквивалентное ему значение  $h_{\text{in}}$  уменьшается по степенному закону  $h_{\text{in}} \propto (-t)^\gamma$  (в момент достижения им центра  $t = 0$ , поэтому перед временем введен знак минус). Как видно из (1.125), комбинация  $D F^m t/h^{n+2}$  является безразмерной, что позволяет представить решение в виде

$$F(h, t) = \frac{h^{(n+2)/m}}{(-Dt)^{1/m}} y(\xi); \quad 1 \leq \xi = \frac{h}{A(-t)^\gamma} \leq \infty, \quad (1.132)$$

где  $y(\xi)$  — безразмерная функция-представитель одной автомодельной переменной  $\xi$ . Скомбинировать безразмерную переменную из  $h$ ,  $t$  и  $D$  невозможно, поэтому введена дополнительная константа  $A$ , размерность которой  $[\text{см}^2 \text{с}^{-(1+\gamma)}]$ . Заранее неизвестный показатель  $\gamma$  должен определяться в ходе решения задачи. Тем самым мы пришли к автомодельной задаче II рода, аналогичной задаче о сходящейся ударной волне [84, 86].

Подставляя (1.132) в уравнение (1.125), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для представителя

$$y^m \left[ \xi^2 y'' + \frac{2(n+2)}{m} \xi y' + \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y \right] - \gamma \xi y' - \frac{y}{m} = 0.$$

Можно охарактеризовать это уравнение как уравнение для нелинейного осциллятора с диссипацией. Параметр  $\gamma$  определяет степень диссипации (если  $\gamma$  положительна).

Краевые условия определяются следующим образом. Очевидно, что темп аккреции через внутренний край кольца по смыслу равен нулю. Таким образом, на внутренней границе  $h_{\text{in}}$  (ей соответствует  $\xi = 1$ ) должны обращаться в ноль как функция  $F(h_{\text{in}}, t)$ , так и ее производная  $\partial F(h_{\text{in}}, t)/\partial h$  (ср. с (1.100)), иначе при подстановке в (1.125) возникает  $\delta$ -образный источник (сток). Следовательно, имеем два условия:

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

Еще одно условие следует из требования, чтобы на любом конечном радиусе в момент  $t = 0$  (при достижении языком центра аккреции) все физические величины оставались конечными. Из (1.132) следует, что  $F(h, t)$  не расходится при  $t \rightarrow 0$  и  $h \neq 0$  только, если

$$y(\xi = \infty) = 0.$$



Таким образом, решение уравнения второго порядка должно удовлетворять трем условиям, что возможно только при определенном значении  $\gamma$ .

Проведем качественное исследование уравнения для функции-представителя. Для этого перейдем к переменной  $x = \ln \xi + C$  (постоянная  $C$  не будет входить в результирующую систему уравнений (1.133), но важна при согласовании решений  $y(x)$ ,  $p(x)$ ). Производную по  $x$  будем обозначать точкой. Выпишем получающуюся систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= p, \\ \dot{p} &= \frac{y^{1-m}}{m} + \gamma y^{-m} p - \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y - \frac{2n+4-m}{m} p. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Нас интересует решение, которое при  $\xi = 1$  выходит из начала координат на плоскости  $(p, y)$  и при  $\xi = \infty$  возвращается туда же. При  $y \ll 1$ ,  $p \ll 1$  система (1.133) имеет асимптотические решения вида

$$p = \frac{\gamma}{1-m} y^{1-m}; \quad y = \left( \frac{\gamma m}{1-m} \ln \xi \right)^{1/m}, \quad (1.134)$$

$$p = -\frac{y}{\gamma m}; \quad y = \xi^{-\frac{1}{\gamma m}}. \quad (1.135)$$

Функции (1.134) дают асимптотику при  $\xi \rightarrow 1$ , а (1.135) — при  $\xi \rightarrow \infty$ . Фазовые траектории решений уравнений показаны на Рис. 1.13 для четырех значений  $\gamma$ . Каждая точка, для которой  $\dot{y} = 0$  и  $\dot{p} = 0$ , является особой точкой. На фазовой плоскости имеется устойчивый фокус с координатами

$$p = 0, \quad y_0 = \left[ \frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m}.$$

При некотором  $\gamma_{\text{cr}}$  существует замкнутое решение (Рис. 1.13, b). Численное исследование показывает, что при  $m = 2/5$ ,  $n = 6/5$  (случай  $\varkappa_{\text{T}} \gg \varkappa_{\text{ff}}$ ) искомое значение равно  $\gamma_{\text{cr}} \approx 0.595$ , а при  $m = 3/10$ ,  $n = 4/5$  ( $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_{\text{T}}$ )  $\gamma_{\text{cr}} \approx 0.696$ . При некотором  $\gamma_+$  происходит перестройка фазовых траекторий и смена устойчивости фокуса (Рис. 1.13, d).

Таким образом, внутренняя граница диска движется к центру по закону  $h_{\text{in}} = A(-t)^{\gamma_{\text{cr}}}$  (см. Рис. 1.14). Асимптотическое решение исходного

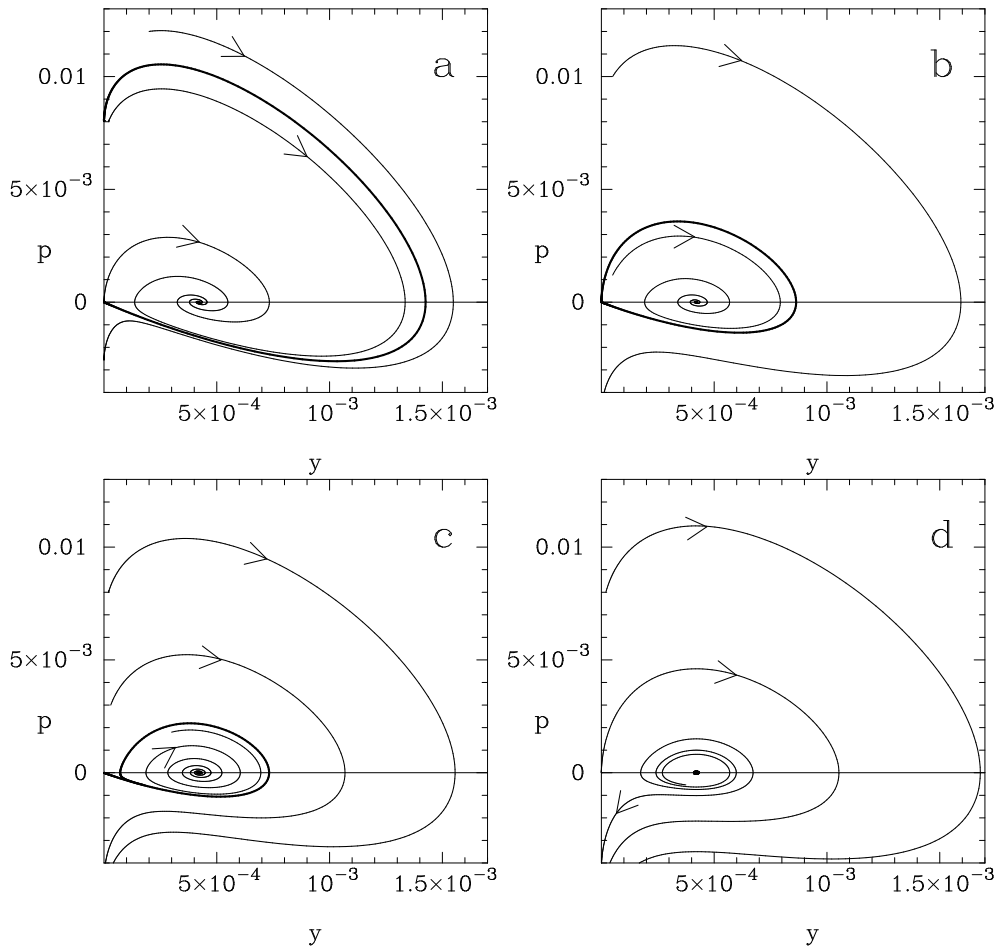


Рис. 1.13: Фазовый портрет системы уравнений (1.139) для разных значений  $\gamma$ . Стрелки указывают направление изменения  $\xi$  от 1 до  $\infty$  ( $x$  от  $C$  до  $\infty$ ). (a) При  $\gamma < \gamma_{cr}$  решения внутри сепаратрисы, которая показана жирной линией, входят в стационарную точку (фокус) на горизонтальной оси  $(0, y_0)$ . (b) Замкнутое решение реализуется при  $\gamma = \gamma_{cr}$  и совпадает с сепаратрисой. Сепаратриса в то же время представляет собой предельный цикл для решений в области, ограниченной ей, для  $x \rightarrow -\infty$ . (c) При  $\gamma_{cr} < \gamma < \gamma_+$  с ростом  $\gamma$  сепаратриса (жирная кривая) постепенно сжимается; (d) при  $\gamma = \gamma_+$  она устремляется в точку  $(0, y_0)$ .

уравнения (1.125) при  $\xi \rightarrow \infty$  (то есть при  $t \rightarrow 0$ , когда язык достигает

центра аккреции), как следует из (1.135), имеет вид

$$F = \frac{h^{\frac{n+2}{m}}}{(-Dt)^{\frac{1}{m}}} \left[ \frac{A(-t)^\gamma}{h} \right]^{\frac{1}{\gamma m}} = \frac{A^{\frac{1}{\gamma m}} h^{\frac{n+2}{m} - \frac{1}{\gamma m}}}{D^{1/m}}. \quad (1.136)$$

Заметим, что при больших  $h$  профиль  $F(h, t)$  на стадии формирования “языка” не меняется со временем (см. Рис. 1.14 и 1.15). Сшивка полученного автомодельного решения с начальным профилем  $F_0(h)$  вблизи радиуса, где вещество было брошено в момент времени  $(-t_0)$ , позволяет определить и постоянную  $A$ . С точностью до безразмерного множителя имеем из (1.136)

$$A = F_0^{\gamma m} D^{\gamma m} / h_0^{\gamma m (n+2) - 1},$$

где  $h_0 = \sqrt{GM r_0}$  определяется начальным радиусом кольца  $r_0$ .

### Квазистационарная стадия при росте аккреции

Ищем решение (1.125) в виде:

$$F = \frac{h^{\frac{n+2}{m}}}{(Dt)^{1/m}} y(\xi), \quad 0 \leq \xi = \frac{h}{At^\beta} \leq \infty. \quad (1.137)$$

Время  $t$  теперь положительно. Подставляя (1.137) в (1.125), получим уравнение для функции-представителя:

$$y^m \left[ \xi^2 y'' + \frac{2(n+2)}{m} \xi y' + \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y \right] + \beta \xi y' + \frac{y}{m} = 0 \quad (1.138)$$

или систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y} &= p; \\ \dot{p} &= -\frac{y^{1-m}}{m} - \beta y^{-m} p - \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y - \frac{2n+4-m}{m} p \end{aligned} \quad (1.139)$$

При  $\xi \rightarrow \infty$  асимптотическое решение этой системы имеет вид (главный вклад дают два последних члена уравнения (1.138))

$$p = -\frac{y}{\beta m}; \quad y = \xi^{-\frac{1}{\beta m}}. \quad (1.140)$$

Отсюда следует, что при больших  $h$  распределение  $F(h, t)$  будет таким же, как и на предыдущей стадии (1.136), только если  $\beta = \gamma_{\text{cr}}$ . Таким

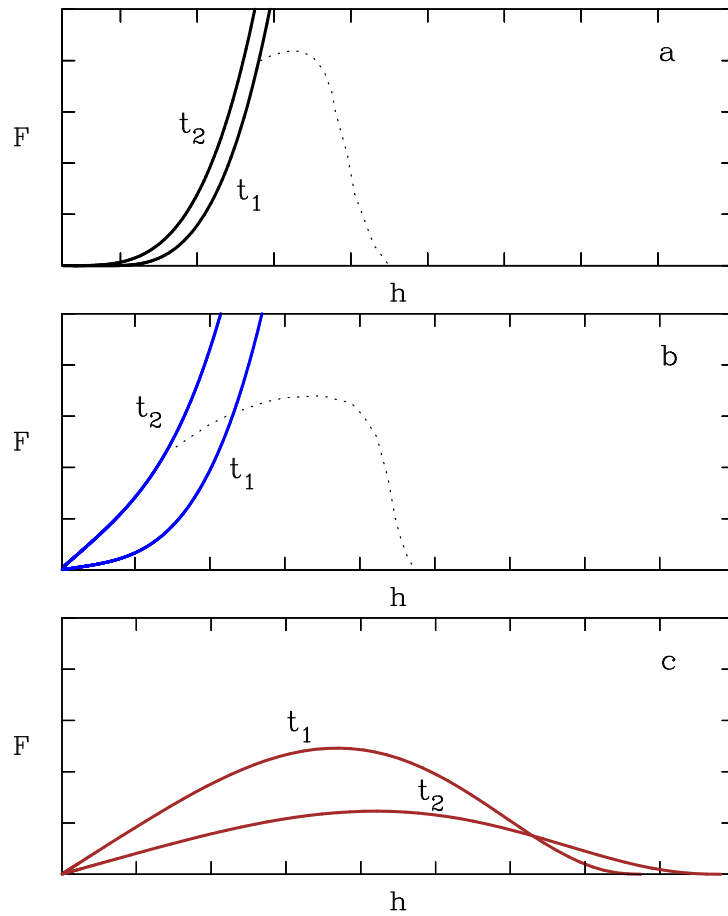


Рис. 1.14: Рассчитанный профиль  $F(h)$  в решении Любарского–Шакуры на трех стадиях автомодельной эволюции: (а) формирование “языка”,  $t_2/t_1 = 1/4$  (время отрицательно и стремится к нулю); (б) квазистационарная аккреция,  $t_2/t_1 = 3$  (время теперь больше нуля); (с) затухание аккреции,  $t_2/t_1 = 2$ . Величины  $F$  и  $h$  отнормированы на произвольные значения. Пунктиром на двух верхних панелях символически дана зависимость  $F(h)$  для областей, в которых решение (неизвестное) носит неавтомодельный характер. Расчет проведен для параметров в законе непрозрачности  $m = 2/5$ ,  $n = 6/5$ .

образом, показатель автомодельности остается прежним. При  $\xi \rightarrow 0$  (на очень больших временах или в центре аккреции) имеются два асимпто-

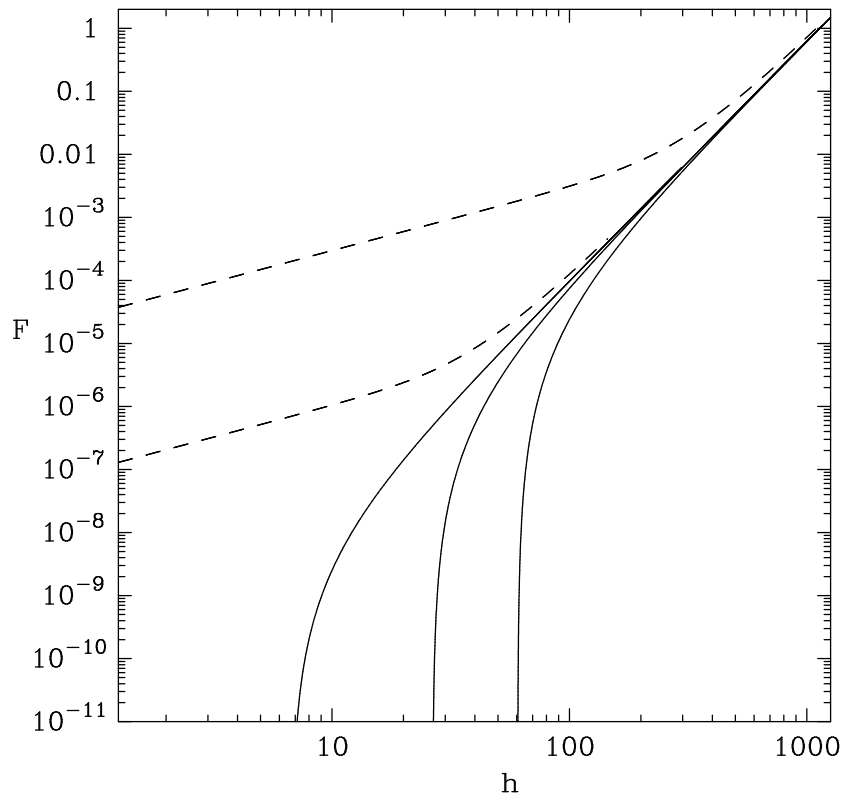


Рис. 1.15: Рассчитанные профили  $F(h)$  в решении Любарского–Шакуры на стадии формирования языка (сплошная кривая) и на стадии квазистационарной аккреции (штрихи). На первой стадии видно движение внутреннего края “языка” к центру. На второй стадии видно, что со временем расширяется зона квазистационарной аккреции ( $F \propto h$ ). Темп аккреции растет со временем, от самой нижней кривой к верхней. Величины  $F$  и  $h$  отнормированы на характерные значения.

тических решения (теперь главный вклад дают члены уравнения (1.138) в квадратных скобках):

$$p = -\frac{n+2}{m}y; \quad y = \xi^{-\frac{n+2}{m}}, \quad (1.141)$$

$$p = -\frac{n+2-m}{m}y; \quad y = \xi^{-\frac{n+2-m}{m}}. \quad (1.142)$$

Первому соответствует  $(\partial F/\partial h)_{h \rightarrow 0} = 0$ , т.е. решение без стока вещества ( $\dot{M}_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0$ ), а второму — решение с постоянным по радиусу при малых  $h$  темпом аккреции, который зависит от времени вблизи тяготеющего центра по закону

$$|\dot{M}| = \left| \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} \approx \frac{(At^\beta)^{\frac{n+2-m}{m}}}{(Dt)^{1/m}} = \frac{A^{\frac{n+2-m}{m}} t^{\frac{\gamma_{\text{cr}}(n+2-m)-1}{m}}}{D^{1/m}}. \quad (1.143)$$

Именно это решение со стоком вещества описывает вторую стадию аккреции в интересующем нас случае (см. Рис. 1.14b). При  $\varkappa_{\text{T}} \gg \varkappa_{\text{ff}}$  получаем  $|\dot{M}| \propto t^{1.67}$  и при  $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_{\text{T}}$  темп аккреции растет как  $|\dot{M}| \propto t^{2.47}$ .

Если ввести обозначения

$$\dot{M}_0 = \frac{F_0}{h_0}, \quad \tau = \frac{h_0^{n+2}}{F_0^m D} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{h_0^{n+2-m}}{(M_0)^m D},$$

то темп аккреции на гравитирующий центр на квазистационарной стадии можно записать через темп аккреции, заданный начальным значением момента вязких сил в начальном кольце вещества:

$$\dot{M} = \dot{M}_0 \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{\gamma_{\text{cr}}(n+2-m)-1}{m}} \quad \text{при} \quad t > \tau.$$

### Стадия затухания аккреции. Расплывание диска.

Снова ищем решение (1.125) в виде (1.137), однако теперь переменная  $\xi$  меняется в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$  ( $\xi = 1$  соответствует внешнему краю диска  $r_{\text{out}}$  или эквивалентному ему значению  $h_{\text{out}} = \sqrt{GM r_{\text{out}}(t)}$ ). Таким образом, решение для этой стадии по-прежнему описывается уравнением (1.138) или эквивалентной ему системой (1.139) с граничными условиями  $y(0) = y(1) = y'(1) = 0$ . Значение автомодельного показателя  $\beta$  теперь найдем, воспользовавшись законом сохранения полного момента импульса вещества в диске. В самом деле, если в начальный момент кольцо располагалось на радиусе  $r_0$ , во много раз превосходящем радиус последней устойчивой орбиты, то в процессе аккреции сохраняется величина

$$K = 2\pi \int_0^{r_{\text{out}}} \Sigma h r dr = \text{const}. \quad (1.144)$$

Подставляя (1.137) в (1.144), попутно воспользовавшись связью (1.127) между  $\Sigma_0$  и  $F$ , получим:

$$K = \frac{2\pi}{(1-m)D} \int_0^{h_{\text{out}}} F^{1-m} h^{n+1} dh = \frac{2\pi A^{\frac{n+2}{m}} t^{\frac{\beta(n+2)}{m}}}{(1-m)D^{1/m} t^{\frac{1-m}{m}}} \int_0^1 y^{1-m}(\xi) \xi^{\frac{n+2-m}{m}} d\xi. \quad (1.145)$$

Из условия  $\partial K/\partial t = 0$  находим  $\beta = (1-m)/(n+2)$ , кроме того, выражение (1.145) дает точное соотношение для константы  $A$ . При этом  $\beta$  нужное решение уравнения для функции-представителя (1.138) можно найти в явном виде. Метод решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (1.138) или эквивалентной ему системы уравнений первого порядка (1.139) аналогичен решению подобных уравнений, возникающих в задачах распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры [98]. Так как уравнения (1.139) содержат переменную  $x$  только под знаком дифференциала, то, вводя  $p(y) = dy/dx$  в качестве новой неизвестной функции от переменной  $y$ , понижаем порядок:

$$y^m \left[ p \frac{dp}{dy} + \frac{2n+4-m}{m} p + \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y \right] + \beta p + \frac{y}{m} = 0.$$

Далее для удобства вводится  $Z(y) = p(y) + y(n+2-m)/m$ :

$$y^m \left[ \left( Z - \frac{n+2-m}{m} y \right) \frac{dZ}{dy} + \frac{n+2}{m} Z \right] + \beta \left( Z - \frac{n+2-m}{m} y \right) + \frac{y}{m} = 0.$$

Решение ищется в виде  $Z(y) = B y^{1-m}$ . Собирая коэффициенты при степенях  $y^{1-m}$  в последнем уравнении, находим  $B = -\beta/(1-m)$ . После подстановки  $Z(y) = -\frac{\beta}{1-m} y^{1-m}$  уравнение оказывается линейным алгебраическим уравнением относительно  $y$ . Левая часть уравнения обращается в нуль при  $\beta = (1-m)/(n+2)$ . С другой стороны, равенство  $\beta$  этому значению является необходимым условием существования автомодельного решения на стадии затухания аккреции (из условия  $\partial K/\partial t = 0$ ). Таким образом,

$$p = -\frac{y^{1-m}}{n+2} - \frac{n+2-m}{m} y$$

является частным решением, удовлетворяющим граничному условию  $p(y=0) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$ . Интегрирование этого выражения проводится элементарно, и с граничным условием  $y(\xi=1) = 0$  решение записывается в

виде

$$y(\xi) = \left[ \frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} \left( \frac{1}{\xi^{n+2-m}} - 1 \right)^{1/m}. \quad (1.146)$$

При таком решении интеграл в правой части (1.145) сводится к бета-функции  $B\left(\frac{3+n-m}{2+n-m}, \frac{1}{m}\right)$  (эйлеров интеграл первого рода), и решение основного уравнения (1.125) на стадии затухания окончательно принимает вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{K(1-m)}{2\pi t B\left(\frac{3+n-m}{2+n-m}, \frac{1}{m}\right)} \left[ \frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} \xi (1 - \xi^{n+2-m})^{1/m} = \\ &= \frac{A^{\frac{n+2}{m}}}{D^{1/m}} \left[ \frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} \frac{\xi (1 - \xi^{n+2-m})^{1/m}}{t}. \end{aligned}$$

Темп аккреции в центре диска затухает по закону

$$\dot{M} = \left| \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} = \frac{A^{\frac{n+2-m}{m}}}{D^{1/m}} \left[ \frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} t^{-\frac{n+3-m}{n+2}}.$$

Временная зависимость также может быть выражена через степени  $a, b$  в зависимости  $\nu_t \propto \Sigma^a r^b$ :  $\lg(\dot{M})/\lg(t) = 1 + 1/(5a - 2b + 4)$ . При  $\varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}$  имеем  $\dot{M} \propto t^{-19/16}$  и  $\dot{M} \propto t^{-5/4}$  при  $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T$ .

На стадиях формирования квазистационарной аккреции и затухания аккреции, полное энерговыделение в диске определяется, главным образом, выделением гравитационной энергии во внутренних областях диска. Светимость диска равна  $\dot{M}_{\text{in}} \eta_{\text{accr}} c^2$ , где  $\eta_{\text{accr}}$  — эффективность энерговыделения. На стадии формирования “языка” энерговыделение существенно зависит от начального распределения  $F(h)$ , так как поток тепла с единицы поверхности диска  $\propto F/h^7$  (ср. с (1.54)).

Представленные решения описывают процессы в реальных астрофизических дисках в некотором приближении. Предположение о постоянстве закона непрозрачности (то есть коэффициентов  $m$  и  $n$ ) не выполняется во всем диске на протяжении всей эволюции. Для полного учета изменения вида закона непрозрачности требуется проведение численных расчетов с привлечением затабулированных значений коэффициентов непрозрачности как функций плотности и температуры. С другой



стороны, коэффициент непрозрачности  $\kappa$  входит в результирующие решения в малой степени. Необходимо отметить, что в зонах с переменной степенью ионизации непрозрачность меняется особенно сильно.

### 1.6.7 Решение для $\alpha$ -диска в двойной системе

Как мы видели, вязкая эволюция кольца вещества вступает со временем на стадию неограниченного “расплывания”, когда часть вещества диска приобретает большой момент импульса и удаляется все дальше от центра. В двойных системах такое расплывание диска не может происходить неограниченно из-за гравитационного влияния второй звезды. Приливные силы со стороны второй звезды приводят к тому, что диск ограничен на некотором расстоянии от центра внутри полости Роша.

В работе Липуновой и Шакуры [96] было найдено решение, описывающее эволюцию  $\alpha$ -диска в двойной системе. С помощью полученного решения были смоделированы оптические и рентгеновские кривые блеска рентгеновских новых А 0620-00 и GU Mus 1124-68 на спаде пика. В результате были получены ограничения на параметр турбулентности  $\alpha$  [99, 100].

Момент импульса в области внешнего радиуса перекачивается от вещества диска в орбитальное вращение двойной системы. Папалойзу и Прингл [79] показали что приливной радиус обрезания в среднем порядка  $\sim 0.9$  радиуса полости Роша. Этот радиус близок к радиусу последней непересекающейся периодической орбиты, которая рассчитывается в задаче трех тел [80]. С помощью численных расчетов было показано, что приливной тензор напряжений важен в довольно узком кольце вблизи внешнего радиуса. Значительные возмущения в этой области приводят к рождению сильных спиральных ударных волн [70, 81, 82].

Поскольку отток момента импульса происходит в узкой области вблизи внешнего радиуса обрезания, мы можем не исследовать детально эту область, а рассмотреть ее как сток  $\delta$ -типа. На расстояниях, много меньших радиуса приливного обрезания,  $F$  растет как  $r^{1/2}$  — там стационарный диск ведет себя согласно стандартной модели, не “замечая” внешних граничных условий и зависимость момента вязких сил от радиуса описывается выражением (1.99).

В рамках математической задачи мы также предполагаем, что величина внешнего радиуса диска не меняется, а темп втекания вещества на внешнем диске пренебрежимо мал. Условие неизменности внешнего ра-

диуса справедливо для быстротечных периодов активности при вспышках в некоторых типах тесных двойных систем. Численные расчеты, в которых моделируется долговременная эволюция нестационарных дисков в двойных системах (рентгеновских и карликовых новых) — DIM<sup>10</sup>, — учитывают переменность внешнего радиуса диска [101]. Во время мощных вспышек в рентгеновских новых, когда яркость источника увеличивается до миллиона раз, можно говорить о том, что темп аккреции внутри диска намного превышает темп перетекания вещества со звезды-компаньона. Этому соответствует равенство нулю производной  $F(h, t)$  по  $h$  на внешнем радиусе.

Решение основного уравнения нестационарной аккреции (1.125) для диска, имеющего ограниченный постоянный внешний радиус, может быть найдено методом разделения переменных:

$$F(h, t) = F(t) \cdot f_F(h/h_0). \quad (1.147)$$

Величина  $h_0 = (GM r_{\text{out}})^{1/2}$  равна удельному моменту импульса на внешнем краю диска. Указанные выше свойства момента вязких сил приводят к таким условиям на внешнем радиусе:

$$f_F(1) = 1, \quad f'_F(1) = 0, \quad (1.148)$$

первое из коотрых является нормировочным, а второе выражает собой тот факт, что момент вязких сил имеет максимум в непосредственной близости от внешнего радиуса диска (Рис. 1.16). Это равносильно условию нулевого темпа аккреции на  $r_{\text{out}}$ . Также можно говорить о равенстве нулю радиальной компоненты скорости в диске. Аналогичный подход использовался, например, в работе [70] при исследовании диска, окружающего снаружи двойную систему. На внутренней границе такого диска происходит вток момента импульса, отдаваемого двойной системой, в результате чего звезды постепенно сближаются.

Таким образом, приливные взаимодействия не учитываются в уравнении, которое мы решаем (1.98 или 1.125), но приводят к установке специфических граничных условий на внешнем краю диска.

Естественно, что в реальности внутренний радиус диска  $r_{\text{in}} \neq 0$ , однако, во многих ситуациях  $r_{\text{in}}/r_{\text{out}} \ll 1$ .

Из уравнения (1.100), подставляя  $h \equiv h_K$ , получаем

$$\dot{M}(h, t) = f'_F(h/h_0)F(t)/h_0. \quad (1.149)$$

---

<sup>10</sup>Disk Instability Models (*англ.*)

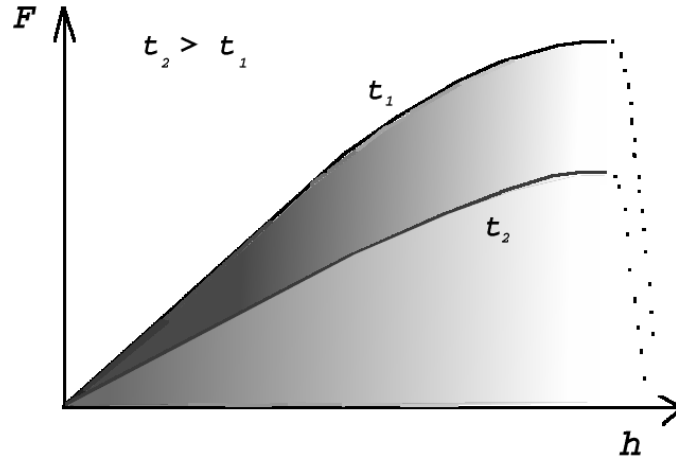


Рис. 1.16: Момент вязких сил  $F$  в зависимости от удельного момента импульса  $h$  в аккреционном диске в двойной системе в два момента времени,  $t_2$  позже  $t_1$ . Тенью условно показано распределение поверхностной плотности в диске. Темп аккреции падает со временем.

Подставляя произведение функций в уравнение нестационарной аккреции (1.125) получаем временную часть решения, которое дает асимптотику для эволюции диска после пика вспышки:

$$F(t) = \left( \frac{h_0^{n+2}}{\lambda m D (t + t_0)} \right)^{1/m}. \quad (1.150)$$

$D$  — размерная константа (1.128), которая может быть получена при решении уравнений вертикальной структуры,  $\lambda$  — константа разделения, которая может быть найдена из граничных условий на  $f_F(h/h_0)$ ,  $t_0$  — константа интегрирования в единицах времени.

Закон изменения темпа аккреции записывается в следующем виде:

$$\dot{M}(t) = \dot{M}(0) (1 + t/t_0)^{-1/m}, \quad (1.151)$$

где  $\dot{M}(0)$  — темп аккреции в некоторый момент времени  $t = 0$ , за который может быть принят любой момент на стадии убывания темпа аккреции.

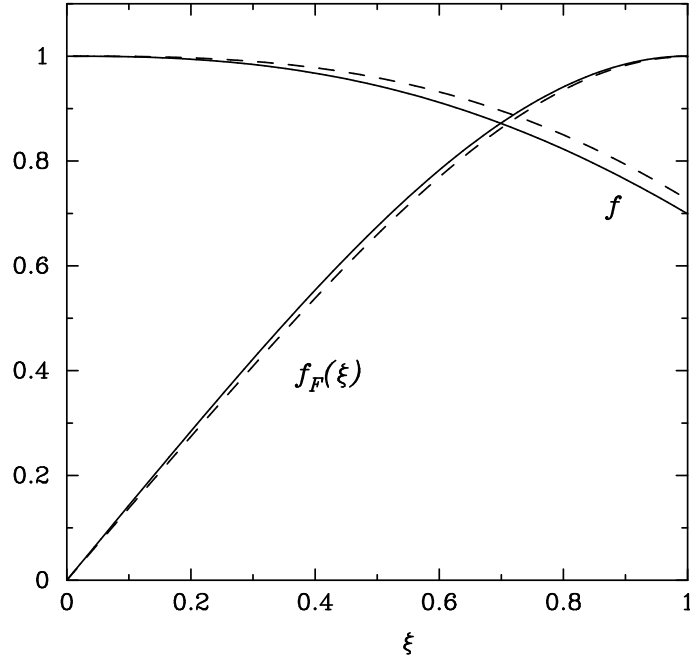


Рис. 1.17: Решение  $f_F(\xi)$  в двух случаях: если  $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_{\text{T}}$  (сплошная линия) и если  $\varkappa_{\text{T}} \gg \varkappa_{\text{ff}}$  (штриховая линия). Также изображена функция  $f(r)$ , рассчитанная по формуле (1.77), которая входит в выражения для расчета радиальных зависимостей физических параметров (§1.5.3). Темп аккреции практически не меняется по радиусу в области, где  $f \approx 1$ . Переменная  $\xi = h/h_o$ ,  $h_o$  – удельный момент импульса на внешнем радиусе.

Тогда параметр решения

$$t_0 = \frac{h_0^{n+2}}{\lambda m D F^m(0)},$$

где  $F(0)$  – значение  $F(h, t = 0)$  на внешнем радиусе  $r_{\text{out}}$ . Подставляя выражение (1.126) для  $D$  и учитывая, что  $F_{\text{out}} = 3 \pi h_0 \nu_{\text{out}} \Sigma_0$ , получаем:

$$t_0 = \frac{4}{3 \lambda a} \frac{r_{\text{out}}^2}{\nu_{\text{out}}(t = 0)}, \quad (1.152)$$

где  $a$  – степень при  $\Sigma$  в зависимости  $\nu_t \propto \Sigma^a r^b$ .

После разделения переменных в основном уравнении получится нелинейное уравнение для  $f_F(\xi)$ . Оно является частным случаем обобщенного

Таблица 1.5: Значения параметров аналитического решения (1.150), (1.151), (1.154) для ограниченного  $\alpha$ -диска.

	m	n	$\lambda$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$k$	$l$
$\varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}$	2/5	6/5	3.482	1.376	-0.39	0.02	3.8	6.6
$\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T$	3/10	4/5	3.137	1.430	-0.46	0.03	3.5	6.0
OPAL	1/3	1	3.319	1.3998	-0.425	0.0249	11/3	19/3

уравнения Эмдена–Фаулера [102]

$$\frac{d^2 f_F}{d\xi^2} = \lambda \xi^n f_F^{1-m}, \quad (1.153)$$

решение которого можно искать в виде полинома

$$f_F(\xi) = a_0 \xi + a_1 \xi^k + a_2 \xi^l + \dots \quad (1.154)$$

Подставляя полином вместо  $f_F(\xi)$  в уравнение (1.153), получим для второго и третьего членов:

$$\begin{aligned} k = 3 + n - m, \quad a_1 &= \frac{\lambda a_0^{1-m}}{k(k-1)}, \\ l = 2k - 1, \quad a_2 &= \frac{\lambda a_0^{-m} a_1}{l(l-1)}(1-m). \end{aligned} \quad (1.155)$$

В Таблице 1.5 даны значения констант  $a_0$ ,  $\lambda$ , полученные с учетом граничных условий (1.148) на  $f_F(\xi)$  для режимов непрозрачности по чистому рассеянию и чистому поглощению, а также при аппроксимации закона непрозрачности при помощи результатов численных расчетов OPAL [63]. Соответствующие функции  $f_F$  показаны на Рис. 1.17. Случай OPAL эффективно оказывается чем-то средним. Замечательно, что значение  $a_0$ , которое входит в выражение для темпа аккреции

$$\dot{M}_{\text{in}} = \frac{F_{\text{max}}}{h_{\text{max}}} a_0,$$

отличается всего на 2% от соответствующей константы, рассчитанной для автомодельного решения Любарского–Шакуры на заключительной стадии расплывающегося диска (см. §1.6.6) при подстановке в качестве  $h_{\text{max}}$  удельного момента импульса, соответствующего максимуму  $F$ . Это означает, что профиль  $F(h)$  в области диска, где  $F(h)$  растет, практически не зависит от условий вне этой области.

### Радиальные зависимости для нестационарного диска в двойной системе

Приведем выражения для эволюции физических параметров в диске, которые получаются из уравнений (1.75, 1.127, 1.128 и 1.150).

Отметим, что в зависимостях (1.79) и (1.85) присутствует другая функция  $f(r)$ , определяемая соотношением (1.77), которая в случае стационарного диска связана с  $f_F$  как  $f_F = \xi f$ , а в случае диска с переменным по радиусу темпом аккреции (например, нестационарный диск) связь такая:  $f_F = a_0 \xi f(r)$  (см. Рис. 1.17).

В следующих выражениях для параметра диффузии  $D$ , поверхностной плотности  $\Sigma_o$ , температуры в центральной плоскости  $T_c$ , относительной полутолщины диска и оптической толщи принято обозначение  $m_x = M/M_\odot$  и значения  $\Pi_{1..4}$  должны браться для соответствующего режима. Характерное время  $t_0$  зависит от договоренности, какому темпу аккреции соответствует  $t = 0$ , и может быть определено как

$$t_0 = \frac{h_0^{n+2-m} a_0^m}{\lambda m D \dot{M}_{\text{in}}^m(t=0)}, \quad (1.156)$$

Необходимо помнить, что  $t_0$  зависит от типа непрозрачности.

**Режим доминирующего рассеяния** ( $\varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}$ ) Подставляя численные значения констант в (1.128), получим:

$$D [\Gamma^{-2/5} \text{ см}^{28/5} \text{ с}^{-17/5}] = 1.40 \times 10^{38} \alpha^{4/5} m_x^{6/5} \left(\frac{\mu}{0.5}\right)^{-4/5} \Pi_\Sigma^{-1} \varkappa_T^{1/5}, \quad (1.157)$$

с помощью которого перепишем (1.156):

$$t_0 [\text{дни}] = 24.12 \alpha^{-4/5} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot}\right)^{7/5} \left(\frac{\dot{M}_{\text{in}}(t=0)}{10^{18} \Gamma/\text{с}}\right)^{-2/5} m_x^{1/5} \left(\frac{\mu}{0.5}\right)^{4/5} \Pi_\Sigma \varkappa_T^{-1/5}, \quad (1.158)$$

где (1.71) определяет  $\varkappa_T$ . Подставляя комбинацию  $M_{\text{in}} t_0^{1/m}$  из (1.158) в закон для уменьшения темпа аккреции  $\dot{M}(t) = \dot{M}(0) (1+t/t_0)^{-1/m}$  и далее темп аккреции и функцию  $f(r) = f_F/(a_0 \sqrt{r/r_{\text{out}}})$  — в радиальные зависимости (1.79) в зоне В, получаем радиальные зависимости физических

параметров в нестационарном  $\alpha$ -диске:

$$\Sigma_0 [\text{г см}^{-2}] = 2.2 \times 10^2 \alpha^{-2} m_x^{1/2} \left( \frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-3/2} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{3/2} \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-9/10} f_F^{3/5} \times \\ \times \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^2 \varkappa_T^{-1/2} \Pi_\Sigma^{5/2}, \quad (1.159)$$

$$T_c [\text{К}] = 1.8 \times 10^4 \alpha^{-1} m_x^{1/2} \left( \frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-1} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-11/10} f_F^{2/5} \frac{\mu}{0.5} \Pi_3, \quad (1.160)$$

$$\frac{z_0}{r} = 0.04 \alpha^{-1/2} m_x^{-1/4} \left( \frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-1/2} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{3/4} \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-1/20} f_F^{1/5} (\Pi_1 \Pi_3)^{1/2}, \quad (1.161)$$

Безразмерные коэффициенты  $\Pi_\Sigma$ ,  $\Pi_{1..4}$  введены в §1.5.2 при рассмотрении вертикальной структуры  $\alpha$ -диска. Их связь определяется выражениями (1.80), в частности  $\Pi_3 = \Pi_T \Pi_\Sigma$  и  $(\Pi_1 \Pi_3)^{1/2} = \Pi_z \Pi_\Sigma^{1/2}$ , а их значения можно найти в Таблице 1.1 и на Рис. 1.6. Приведем также оценку  $\tau^*$  — эффективной оптической толщи диска:

$$\tau^* = \left( \frac{\varkappa_{0,T} \varkappa_{0,\text{ff}} \rho_c}{T_c^{7/2}} \right)^{1/2} \Sigma_0 = 1.5 \times 10^2 \alpha^{-1} \left( \frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-1/4} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{1/2} \times \\ \times \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{1/10} f_F^{1/10} \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^{5/4} \varkappa_T^{-1/4} \left( \frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{1/2} \left( \frac{\Pi_3^4 \Pi_4^3}{\Pi_1 \Pi_2^2} \right)^{1/4},$$

где размерность  $\varkappa_{0,\text{ff}}$   $[\text{см}^2 \text{К}^{7/2} \text{г}^{-2}]$ .

**Режим доминирующего поглощения** ( $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T$ ) Данный режим реализуется при более низких температурах и давлениях. Аналогично получаем:

$$D [\text{г}^{-3/10} \text{см}^5 \text{с}^{-16/5}] = 2.41 \times 10^{34} \alpha^{4/5} m_x \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^{-3/4} \Pi_\Sigma^{-1} \left( \frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{1/10}, \quad (1.162)$$

$$t_0 [\text{дни}] = 36.41 \alpha^{-4/5} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{5/4} \left( \frac{\dot{M}_{\text{in}}(t=0)}{10^{18} \text{г/с}} \right)^{-3/10} m_x^{1/4} \times \\ \times \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^{3/4} \Pi_\Sigma \left( \frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{-1/10}. \quad (1.163)$$

Величина  $\varkappa_{0,\text{ff}}$  [ $\text{cm}^2 \text{K}^{7/2} \Gamma^{-2}$ ] выбирается согласно (1.73) или (1.72).

$$\Sigma_0 [\Gamma \text{cm}^{-2}] = 9.9 \times 10^2 \alpha^{-8/3} m_x^{5/6} \left( \frac{t+t_0}{10^{\text{d}}} \right)^{-7/3} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}} \right)^{13/6} \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-11/10} f_F^{7/10} \times \\ \times \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^{5/2} \left( \frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{-1/3} \Pi_{\Sigma}^{10/3}, \quad (1.164)$$

$$T_c [\text{K}] = 3.1 \times 10^4 \alpha^{-1} m_x^{1/2} \left( \frac{t+t_0}{10^{\text{d}}} \right)^{-1} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}} \right)^{1/2} \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-9/10} f_F^{3/10} \left( \frac{\mu}{0.5} \right) \Pi_3, \quad (1.165)$$

$$\frac{z_0}{r} = 0.05 \alpha^{-1/2} m_x^{-1/4} \left( \frac{t+t_0}{10^{\text{d}}} \right)^{-1/2} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}} \right)^{3/4} \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{1/20} f_F^{3/20} (\Pi_1 \Pi_3)^{1/2}. \quad (1.166)$$

Безразмерные коэффициенты  $\Pi_{\Sigma}$ ,  $\Pi_{1..4}$  введены в §1.5.2 при рассмотрении вертикальной структуры  $\alpha$ -диска. Их связь определяется выражениями (1.86), в частности  $\Pi_3 = \Pi_T \Pi_{\Sigma}$  и  $(\Pi_1 \Pi_3)^{1/2} = \Pi_z \Pi_{\Sigma}^{1/2}$ , а их значения можно найти в Таблице 1.2 и на Рис. 1.6. Напомним, что поверхностная плотность  $\Sigma_o$  рассчитывается между нижней и верхней поверхностями диска. Полная оптическая толщина (для которой в стационарном случае применима формула (1.87)) равна:

$$\tau = \varkappa_{0,\text{ff}} \rho_c T_c^{-7/2} \Sigma_0 = 2.4 \times 10^2 \alpha^{-4/3} m_x^{1/6} \left( \frac{t+t_0}{10^{\text{d}}} \right)^{-2/3} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}} \right)^{5/6} \times \\ \times \left( \frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-1/10} f_F^{1/5} \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^{3/2} \left( \frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{1/3} \left( \frac{\Pi_3 \Pi_4^2}{\Pi_1^{1/2} \Pi_2} \right)^{1/3}. \quad (1.167)$$

**Закон уменьшения светимости  $\alpha$ -диска с постоянным внешним радиусом** Для расчета болометрической светимости диска можно взять квазистационарный темп аккреции  $\dot{M}(t) = \dot{M}(0, t)$  (1.149), так как основная энергия выделяется на расстояниях от центра  $r \ll r_{\text{out}}$ , где квазистационарность обеспечивается тем, что характерное время эволюции (вязкое время) на малых радиусах много меньше характерного времени на больших радиусах. На Рис. 1.17 это проявляется тем, что функция  $f(r)$  выходит на константу в направлении центра диска.

Используя соотношение (1.158) в законе для уменьшения темпа аккреции  $\dot{M}_{\text{in}}(t) = \dot{M}_{\text{in}}(0) t_0^{1/m} (t+t_0)^{-1/m}$ , по формуле  $L = \eta_{\text{accr}} \dot{M}(t) c^2$ , где



$\eta_{\text{accr}}$  — эффективность аккреции, получаем:

$$L_{\text{T}}(t) [\text{эрг с}^{-1}] = 8.1 \times 10^{38} \alpha^{-2} m_{\text{x}}^{1/2} \left( \frac{t + t_0}{10^{\text{d}}} \right)^{-5/2} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}} \right)^{7/2} \left( \frac{\eta}{0.1} \right) \times \\ \times \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^2 \varkappa_{\text{T}}^{-1/2} \Pi_{\Sigma}^{5/2}, \quad (1.168)$$

если преобладает томсоновское рассеяние во внешних частях диска, и

$$L_{\text{ff}}(t) [\text{эрг с}^{-1}] = 6.7 \times 10^{39} \alpha^{-8/3} m_{\text{x}}^{5/6} \left( \frac{t + t_0}{10^{\text{d}}} \right)^{-10/3} \left( \frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}} \right)^{25/6} \left( \frac{\eta}{0.1} \right) \times \\ \times \left( \frac{\mu}{0.5} \right)^{5/2} \left( \frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{-1/3} \Pi_{\Sigma}^{10/3}, \quad (1.169)$$

если преобладает непрозрачность по Крамерсу во внешних частях диска. Величины  $t_0$  разные в выражениях (1.168) и (1.169) и определяются формулами (1.158) и (1.163), соответственно.

Отметим, что величины  $t_0(\text{T})$  и  $t_0(\text{ff})$  в двух режимах не являются независимыми. В физически согласованной модели с переходом между режимами непрозрачности необходимо искать пересечение решений. Например, будем сравнивать на радиусе  $r = 0.5 r_{\text{out}}$  моменты вязких сил  $F$  и поверхностные плотности  $\Sigma_0$  в двух режимах. Эти два условия будут задавать само время пересечения и разницу времен  $t_0$  в двух режимах. Значение  $t_0$  в одном из режимов является свободным параметром, который определяется из условия, что при  $t = 0$  реализуется некоторое значение темпа аккреции.

На рисунке 1.18 построены болометрические кривые блеска для параметров  $\alpha = 0.3$ ,  $m_{\text{x}} = 3$ ,  $\varkappa_{0,\text{ff}} = 6.45 \times 10^{22} \text{ см}^5 \text{ K}^{7/2} / \text{Г}^2$  и  $\varkappa_{\text{T}} = 0.4 \text{ см}^2 / \text{Г}$  в двух режимах непрозрачности. Используются типичные значения  $\Pi_{1,2,3,4}$ . Нормировочное время в режиме по поглощению (1.163)  $t_0(\text{ff}) \approx 107$  дней получено из условия, что при  $t = 0$  темп аккреции  $\dot{M} = 10^{18} \text{ г/с}$ . Равенство  $F$  и  $\Sigma$  в двух режимах на радиусе  $r/r_{\text{out}} = 0.5$  наступает при

$$t + t_0(\text{ff}) = t_{\text{tr}} \approx 48^{\text{d}} (m_{\text{x}}/3)^{2/5} (\alpha/0.3)^{-4/5} (\mu/0.5)^{3/5} (r_{\text{out}}/R_{\odot})^{4/5}.$$

Однозначно определяется нормировочное время в режиме рассеяния  $t_0(\text{T}) \approx 90$  дней. Пересечение кривых в момент  $t = t_{\text{tr}} - t_0(\text{ff}) \approx -59^{\text{d}}$  отмечено крестом на Рис. 1.18. Можно видеть, что в это время происходит

гладкий переход между решениями в двух режимах. Есть второе пересечение кривых при  $t \approx -3^d$ , которое соответствует второму пересечению функций  $F_T(\xi, t + t_0(T)) = F_{ff}(\xi, t + t_0(ff))$ . Оно имеет лишь математический смысл. Физические условия в диске в этот момент таковы, что реализуется режим с доминирующим поглощением, а значения физических параметров в диске, рассчитанные по формулам (1.157)–(1.167), различаются.

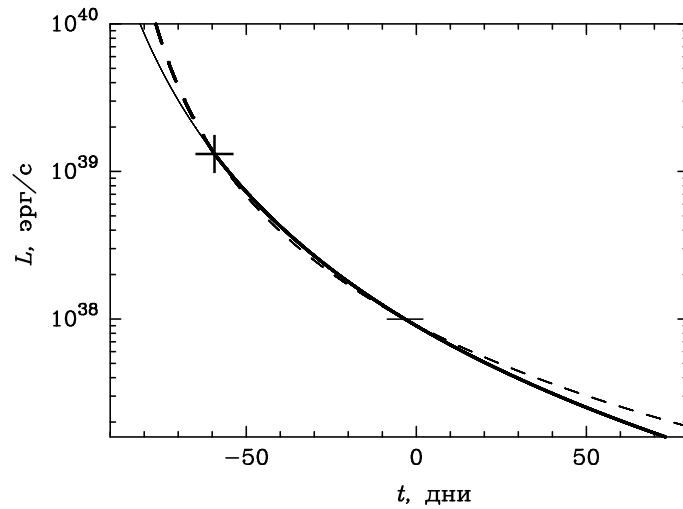


Рис. 1.18: Болومترическая светимость диска  $L_T$  и  $L_{ff}$  для параметров  $m_x = 3$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $r_{out} = R_\odot$ . Штриховая линия — режим непрозрачности по рассеянию, сплошная — по поглощению. Крестом отмечен переход между решениями. Из решения в режиме по рассеянию диск переходит на решение по поглощению (более жирные участки кривых). Также отмечено второе пересечение кривых.

Не забудем, что мы работаем в рамках модели геометрически-тонкого, докритического диска. Поэтому рассмотренные решения применимы только при темпах аккреции ниже эддингтоновского:  $L_{Edd} \approx 1.3 \times 10^{38} m_x \text{ эрг с}^{-1}$ . Из Рис. 1.18 следует, что в реальности эволюция диска, которая может быть описана данным решением, практически целиком идет в режиме непрозрачности по поглощению.

Когда температура в экваториальной плоскости диска  $T_c$  на больших радиусах уменьшается до значений  $\sim 3 \times 10^4 \text{ К}$ , непрозрачность сильно

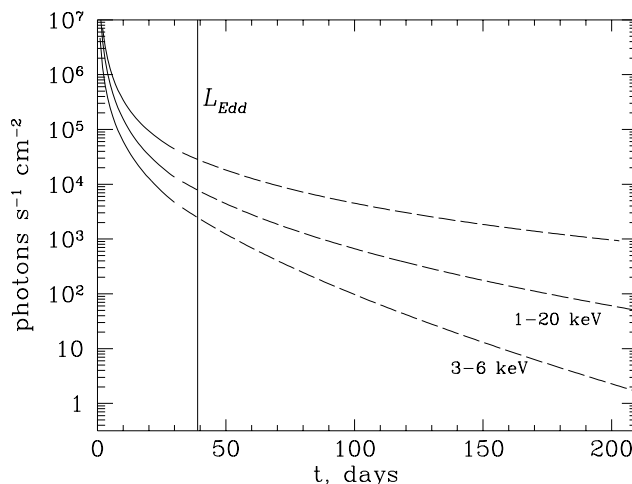


Рис. 1.19: Светимость диска, наблюдаемого с расстояния 1 кпк, при параметрах  $m_x = 3$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $r_{\text{out}} = R_{\odot}$ . Сравняется ход болометрической кривой и двух рентгеновских кривых блеска, 1–20 кэВ и 3–6 кэВ.

возрастает, так как начинается рекомбинация в плазме. Коэффициент  $D$  существенно меняет свое значение, и рассмотренное решение уже не может применяться. При этом в диске происходит перестройка вертикальной структуры за характерное тепловое время, так как изменяется способ переноса энергии нагрева к поверхности диска. Появляются условия для возникновения конвекции. Для параметров диска  $m_x = 3$  и  $\alpha = 0.3$  это происходит при  $t \approx 80^{\text{d}}$  на Рис. 1.18.

На рисунке 1.19 показаны кривые блеска для болометрического и двух рентгеновских диапазонов для диска, который повернут перпендикулярно лучу зрения и находится на расстоянии 1 кпк. Вертикальной линией отмечен момент времени, после которого болометрическая светимость диска становится меньше  $L_{\text{Edd}}$ . Такой ход кривых блеска очень хорошо описывает экспоненциальное уменьшение светимости, которое наблюдается при вспышках рентгеновских новых.

В работе [100] было проведено моделирование двух вспышек рентгеновских новых в рентгеновском и оптических спектральных диапазонах и сравнение с наблюдаемыми кривыми. В модели был произведен учет облучения рентгеновским потоком внешних частей диска и его переработки в оптическое излучение. При этом были рассмотрены эффект

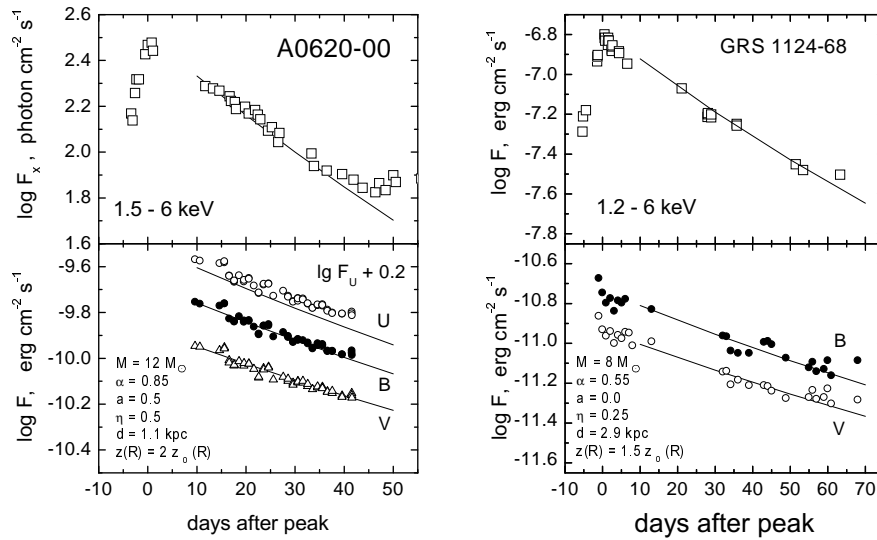


Рис. 1.20: Моделирование вспышек двух рентгеновских новых А 06020-00 (1975 г.) и GU Mus 1124-68 (1991 г.) из работы Сулейманова и др. [100]. Параметры моделей указаны на рисунке; кроме введенных в тексте обозначений имеются следующие параметры:  $a$  — безразмерный параметр Керра черной дыры,  $\eta$  — коэффициент переработки фотосферой диска рентгеновского излучения в оптическое,  $z(r)$  — высота рассеивающей атмосферы.

искривления пути фотонов в метрике керровской черной дыры, а также наличие протяженной атмосферы аккреционного диска, способной рассеивать рентгеновское излучение на высоте, превышающей его гидродинамическую толщину. В результате были получены ограничения на параметры двойных систем. При известных динамических параметрах этих систем (период, масса компонент) возможно получить интервал возможных значений параметра турбулентности  $\alpha$ . На Рис. 1.20 дан пример моделирования кривых блеска и указаны подходящие параметры моделей.

## 1.7 Численное моделирование нестационарной дисковой аккреции

### 1.7.1 Решение уравнения вязкой эволюции

Рассмотрим уравнение вязкой эволюции аккреционного диска (1.98), полученное ранее:

$$\frac{\partial \Sigma_0(h_K, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{(GM)^2}{h_K^3} \frac{\partial}{\partial h_K} \left( \left[ \frac{\partial h}{\partial h_K} \right]^{-1} \frac{\partial F(h_K, t)}{\partial h_K} \right), \quad (1.170)$$

где  $t$  — время,  $h(r) = \omega(r)r$  — удельный момент импульса в диске,  $h_K = \sqrt{GMr}$  — кеплеровский момент импульса,  $\Sigma_0(h, t)$  — поверхностная плотность аккреционного диска,  $F(h, t)$  — момент вязких сил, действующих на слой диска.

Будем рассматривать случай кеплеровского вращения, тогда  $h_K = h$ . Случай вращения в релятивистском потенциале усложнит выкладки и поставит ограничения на разбиение на узлы радиальной координаты  $h_K$ . Так, при использовании шварцшильдовского потенциала, в самых внутренних частях диска каждый следующий узел должен отстоять от центра не более чем в два раза дальше, чем предыдущий.

Для полной постановки задачи вязкой эволюции диска требуется задать начальное и граничные условия. В случае аккреции на черную дыру граничное условие на внутренней границе диска  $h_{in}$ , соответствующей последней устойчивой орбите (??), задается как равенство нулю момента вязких сил  $F$ , так как вещество внутри радиуса последней устойчивой орбиты движется без роста его момента импульса. Если аккреционный диск ограничен внутри магнитосферой нейтронной или молодой звезды, то внутреннее граничное условие на значение  $F$  определяется условиями на магнитосферной границе. Таким образом, для ряда объектов задача имеет внутреннее граничное условие первого рода — условие, заданное на значение искомой функции.

Тип внешнего граничного условия также зависит от постановки астрофизической задачи. В двойной системе можно считать, что момент импульса отводится приливными силами с внешней границы диска, соответствующей  $h_{out}$ . Тогда, в предположении, что момент импульса отводится только приливными силами, и приток массы в аккреционный

диск осуществляется только через его внешнюю границу, получаем граничное условие второго рода:  $\partial F/\partial h = \dot{M}_{\text{out}}(t)$ . В более общем случае, если проводить учет приливных сил во внутренних областях диска, унос момента импульса с поверхности диска ветром, захват вещества диском в большом диапазоне его радиусов и т.п., то необходимо добавить в исходное уравнение (1.170) дополнительное слагаемое  $\text{Source}(\Sigma_0, F, h, t, z)$ . Если рассматривается эволюция бесконечного диска, например, протопланетного диска или диска вокруг сверхмассивной черной дыры в активном галактическом ядре, то, с математической точки зрения, граничным условием на бесконечности будет равенство значения и производной момента вязких сил нулю. Однако, с точки зрения численного моделирования, мы не можем оперировать бесконечными значениями удельного момента импульса  $h$ . В таком случае можно пойти двумя путями. Во-первых, можно ограничить рассматриваемую область некоторым значением  $h_{\text{out}}$ , до которого за рассматриваемый интервал времени не дойдет хоть сколько-нибудь значимая часть вещества, и установить там граничное условие на равенство нулю момента вязких сил  $F$ . Во-вторых, можно заменить радиальную координату  $h$  на другую так, чтобы бесконечному значению  $h$  соответствовало конечное значение новой координаты, например:  $1/h$ ,  $1 - e^{-h}$  или  $\text{arccotg } h$ . Однако, замена радиальной координаты приведет к усложнению исходного уравнения и, как следствие, к возникновению жестких ограничений на шаг разбиения на узлы новой радиальной координаты.

Уравнение (1.170) записано относительно двух неизвестных, но связанных друг с другом функций:  $\Sigma_0(h, t)$  и  $F(h, t)$ . Одну из этих величин можно получить при любом значении удельного момента импульса  $h$  и в любой момент времени  $t$ , зная значение другой величины. Выше были рассмотрены случаи линейной и степенной связи  $\Sigma_0(h)$  и  $F(h)$ , для которых возможны аналитические решения уравнения (1.170). Однако, если нам интересно рассмотреть случай, в котором  $\Sigma_0$  и  $F$  не связаны во всем диске единым степенным законом, то задачу (1.170) стоит решать численно. Поставленную задачу удобнее решать относительно функции  $F(h, t)$ , так как граничные условия поставлены именно относительно нее и, кроме того, как будет показано далее, это более удобно при использовании связи между  $\Sigma_0$  и  $F$  через численное решение уравнений вертикальной структуры диска. Таким образом, будем записывать поверхностную плотность как функцию радиальной координаты и момента вязких сил:  $\Sigma_0(F(h, t), h)$ .

Рассмотрим задачу эволюции аккреционного диска в двойной системе в ньютоновском потенциале, считая, что отвод момента импульса осуществляется приливными силами строго с внешней границы диска:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Sigma_0(F(h, t), h)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{(GM)^2}{h^3} \frac{\partial^2 F(h, t)}{\partial h^2}, \\ F(h_{in}, t) = F_{in}(t), \\ \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{out} = \dot{M}_{out}(t), \\ F(h, 0) = F_0(h), \\ h \in [h_{in}, h_{out}], \\ t \in [0, t_{fin}], \end{array} \right. \quad (1.171)$$

где  $F_0(h)$  — начальное условие, удовлетворяющее граничным условиям,  $t_{fin}$  — интервал времени, на котором производится расчет.

Для построения разностной схемы введём произвольный набор узлов  $h_n$ :

$$\begin{aligned} h_1 &< h_2 < \dots < h_n < \dots < h_{N-1} < h_N, \\ \Delta h_n &\equiv h_n - h_{n-1}, \\ n &= 1 \dots N, \end{aligned} \quad (1.172)$$

где  $h_1$  и  $h_N$  соответствуют значению кеплеровского удельного момента импульса на внутренней и внешней границах диска. Будем рассматривать решение уравнения на временном интервале между моментом времени  $t_0$  с уже известными значениями искомой функции и моментом  $t_0 + \Delta t$ , на котором требуется эти значения определить.

Заменяем все функции на соответствующие им сеточные функции и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F(h_n, t_0) &\Rightarrow F_n, & F(h_n, t_0 + \Delta t) &\Rightarrow \tilde{F}_n, \\ \Sigma_0(F(h_n, t_0), h_n) &\Rightarrow \Sigma_n, & \Sigma_0(F(h_n, t_0 + \Delta t), h_n) &\Rightarrow \tilde{\Sigma}_n, \\ F_{in}(t_0) &\Rightarrow F_{in}, & F_{in}(t_0 + \Delta t) &\Rightarrow \tilde{F}_{in}, \\ \dot{M}_{out}(t) &\Rightarrow F'_{out}, & \dot{M}_{out}(t + \Delta t) &\Rightarrow \tilde{F}'_{out}. \end{aligned} \quad (1.173)$$

Начнем составление разностной схемы. Сначала запишем разностные уравнения для граничных условий. Внутреннее граничное условие первого рода запишется в точном виде:

$$F_1 = F_{in}. \quad (1.174)$$

Для того, чтобы записать внешнее граничное условие второго рода, разложим  $\tilde{F}_{N-1}$  в ряд Тейлора в точке  $h_N$ :

$$\tilde{F}_{N-1} = \tilde{F}_N - \Delta h_N \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_N} + \frac{\Delta h_N^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_N} + o(\Delta h_N^2). \quad (1.175)$$

Обратим внимание, что во всех рассматриваемых здесь и далее выражениях для производных по  $h$  используются значения момента вязких сил  $\tilde{F}_n$  на момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Схема, которая будет получена в итоге, называется неявной и является устойчивой. То есть, в отличие от явной схемы, в которой производные по  $h$  записывались бы через известные значения  $F_n$  на момент времени  $t_0$ , неявная схема гарантирует, что внесенные на данном временном шаге ошибки не будут расти на следующих шагах. Не вдаваясь в подробности, заметим, что кроме явной и неявной схемы существует смешанная схема, в которой для вычисления производной по пространственной координате используются значения функции как на момент времени  $t_0$ , так и на момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Смешанная схема в некоторых случаях позволяет добиться увеличения точности решения при правильном подборе весовых коэффициентов между значениями искомой функции в разные моменты времени. Узлы, используемые в различных схемах, изображены на рисунке 1.21.

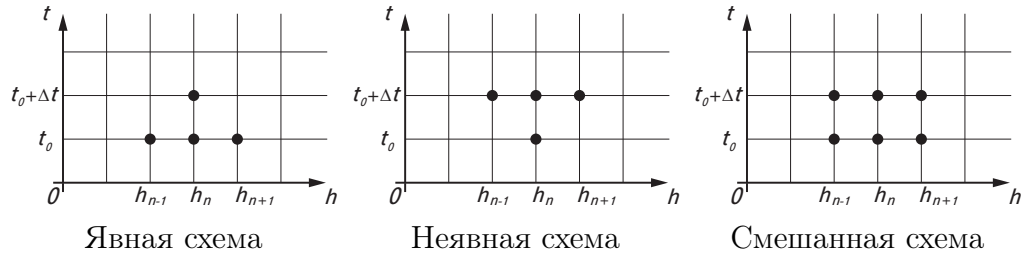


Рис. 1.21: Узлы, которые используются для написания  $n$ -го уравнения системы 1.183 в различных схемах. Нами используется неявная схема.

Из выражения (1.175), отбросив последнее слагаемое, можно получить простое выражение для численного значения первой производной  $F$  по  $h$  с точностью до первого порядка интервала разложения  $\Delta h_N$ :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_N} = \frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h} + o(\Delta h). \quad (1.176)$$



Однако, если подставить в (1.175) значение второй производной  $F$  по  $h$ , выраженное из исходного уравнения (1.171), то можно повысить точность до второго порядка  $\Delta h_N$ :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_N} = \frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h} + \Delta h_N^2 \frac{2\pi h_N^3}{(GM)^2} \frac{\partial \Sigma_0(h_N)}{\partial t} + o(\Delta h_N^2), \quad (1.177)$$

где выражение для производной  $\Sigma_0$  по времени  $t$  по аналогии с (1.176) имеет вид:

$$\frac{\partial \Sigma_0(h_N)}{\partial t} = \frac{\tilde{\Sigma}_N - \Sigma_N}{\Delta t} + o(\Delta t). \quad (1.178)$$

Таким образом, получаем конечное выражение для внешнего граничного условия:

$$\frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h} + \frac{\Delta h_N^2}{\Delta t} \frac{2\pi h_N^3}{(GM)^2} (\tilde{\Sigma}_N - \Sigma_N) + o(\Delta h_N^2) + o(\Delta t) = \tilde{F}'_{\text{out}}. \quad (1.179)$$

Теперь, когда получены уравнения на значения функции на обоих концах интервала  $h$ , получим разностный вид самого дифференциального уравнения из (1.171). Запишем разложения в ряд Тейлора для  $\tilde{F}_{n-1}$  и  $\tilde{F}_{n+1}$  вокруг точки  $h_n$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n-1} &= \tilde{F}_n - \Delta h_n \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_n} + \frac{\Delta h_n^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} + o(\Delta h_n^2), \\ \tilde{F}_{n+1} &= \tilde{F}_n + \Delta h_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_n} + \frac{\Delta h_{n+1}^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} + o(\Delta h_{n+1}^2), \end{aligned} \quad (1.180)$$

где  $n = 2 \dots N - 1$ .

Для удобства введем обозначение:  $\Delta h = \max(h_n)$ , где  $n = 2 \dots N$ . Тогда везде можно заменить  $o(\Delta h_n)$  на  $o(\Delta h)$ .

Можно выразить вторую производную  $F$  по  $h$  из (1.180):

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} = 2 \frac{\tilde{F}_{n-1} \frac{\Delta h_{n+1}}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}} - \tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1} \frac{\Delta h_n}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}}}{\Delta h_n \Delta h_{n+1}} + o(\Delta h^2). \quad (1.181)$$

Заметим, что при использовании однородной сетки по  $h$ , то есть при  $\Delta h_n = \Delta h_{n+1} = \Delta h$ , последнее выражение принимает более простой вид:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} = \frac{\tilde{F}_{n-1} - 2\tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1}}{\Delta h^2}. \quad (1.182)$$

Подставив значения производных (1.178) и (1.181) в дифференциальное уравнение из (1.171) и заменив в (1.171) граничные условия на их разностные аналоги (1.174) и (1.179), получим разностную схему для решения нашей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi h_N^3}{(GM)^2} \frac{\tilde{\Sigma}_n - \Sigma_n}{\Delta t} &= 2 \frac{\tilde{F}_{n-1} \frac{\Delta h_{n+1}}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}} - \tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1} \frac{\Delta h_n}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}}}{\Delta h_n \Delta h_{n+1}}, \\ \tilde{F}_1 &= \tilde{F}_{in}, \\ \frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h} + \frac{\Delta h_N^2}{\Delta t} \frac{2\pi h_N^3}{(GM)^2} (\tilde{\Sigma}_N - \Sigma_N) &= \tilde{F}'_{out}, \\ n &= 2 \dots N - 1. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Заметим, что порядок точности полученной системы составляет  $o(\Delta h^2) + o(\Delta t)$ .

В итоге мы свели решение дифференциального уравнения с граничными условиями (1.171) к последовательному решению системы из  $N$  алгебраических уравнений (1.183) на каждом временном шаге между  $t_0$  и  $t_{fin}$ . Однако эта система не является линейной, так как  $\Sigma_n$  и  $F_n$  связаны нелинейным законом  $\Sigma_n = \Sigma_0(F_n, h_n)$ . Одним из подходов для решения данной системы является метод последовательных приближений значений  $\tilde{\Sigma}_n$ . Для этого сначала выбираются некие приближенные значения  $\tilde{\Sigma}_n^{(1)}$  (самый простой вариант — значения на текущем временном шаге  $\Sigma_n$ ), решается система линейных алгебраических уравнений для нахождения промежуточных значений  $\tilde{F}_n^{(1)}$ . Затем вычисляются новые значения  $\tilde{\Sigma}_n^{(2)} = \Sigma_0(\tilde{F}_n^{(1)}, h_n)$  и снова решается система линейных алгебраических уравнений. Можно придумать множество критериев конца итераций, воспользуемся одним из них — условием малого изменения значений  $\tilde{\Sigma}_n^{(s)}$  между двумя последовательными итерациями. Формализуем этот критерий:

$$\max_{n=2 \dots N} \left| \frac{\tilde{\Sigma}_n^{(s+1)} + \tilde{\Sigma}_n^{(s)}}{\tilde{\Sigma}_n^{(s+1)}} \right| < \epsilon, \quad (1.184)$$

где  $s$  — количество проведенных итераций,  $\epsilon$  — безразмерная точность поиска значений  $\tilde{\Sigma}_n$ .

Осталось заметить, что решение системы линейных алгебраических уравнений на каждом этапе метода последовательных приближений мо-

жет быть проведено методом прогонки. Подробности этого метода можно найти в учебниках по численным методам, например [103].

### 1.7.2 Решение уравнений вертикальной структуры

В § 1.5.2 были получены уравнения вертикальной структуры диска (1.69):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} &= -\omega_K^2 z, \\ \frac{d\Sigma}{dz} &= \rho, \\ \frac{dQ}{dz} &= \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}, \\ \frac{1}{3\kappa_R \rho} \frac{d(aT^4)}{dz} &= -Q. \end{aligned}$$

Для того, что бы использовать решение этой системы уравнений для нахождения связи между поверхностной плотностью  $\Sigma_0$  и моментом вязких сил  $F$ , необходимо выбрать подходящие граничные условия. Если считать известной на данном радиусе поверхностную плотность, то мы получим лишь три граничных условия:  $\Sigma(z=0) = 0$ ,  $\Sigma(z=z_0) = \Sigma_0/2$  и  $Q(z=z_0) = 0$ .

С другой стороны, считая известным момент вязких сил  $F$  на данном радиусе, можно получить необходимое количество граничных условий для решения системы (1.185).

По аналогии с рассуждениями из § 1.5.2 получим граничное условие для давления на уровне фотосферы:

$$P(z=z_0) = \frac{2}{3} \frac{\omega_K^2 z_0}{\kappa_R}. \quad (1.185)$$

Если считать, что энерговыделение происходит только глубже фотосферы, то поток излучения в ней определяется уравнением (1.52):

$$Q(z=z_0) = \frac{3}{4} \frac{F \omega_K}{r^2}. \quad (1.186)$$

В силу симметрии в экваториальной плоскости диска поток равен нулю:

$$Q(z=0) = 0. \quad (1.187)$$

Полагая спектр излучения чернотельным, будем считать температуру в фотосфере равной эффективной температуре:

$$T(z = z_0) = \left( \frac{Q(z = z_0)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}. \quad (1.188)$$

Граничное условие  $\Sigma = 0$  может быть задано как на поверхности диска, там и в плоскости его симметрии.

Обратим внимание, что если мы захотим интегрировать указанную систему дифференциальных уравнений вдоль оси  $z$  от плоскости симметрии диска к его поверхности, то окажется, что в плоскости симметрии задано лишь два граничных условия — на поток  $Q$  (1.186) и поверхностную плотность  $\Sigma$ . Однако, если задать  $\Sigma$  равной нулю на поверхности диска и интегрировать систему в обратном направлении, то нам будут известны начальные значения всех четырех неизвестных функций: давления  $P$  (1.185), поверхностной плотности  $\Sigma$ , потока  $Q$  (1.186) и температуры  $T$  (1.188). Таким образом, далее мы будем рассматривать интегрирование по направлению от поверхности к плоскости его симметрии.

При том, что известны все граничные условия на уровне фотосферы диска, нам не известна полутолщина диска  $z_0$ . Для удобства интегрирования системы 1.185 от фотосферы к плоскости симметрии диска, перепишем ее для другой вертикальной переменной  $\hat{z} \equiv z_0 - z$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\hat{z}} = \omega_{\text{K}}^2 (z_0 - \hat{z}), \quad (1.189)$$

$$\frac{d\Sigma}{d\hat{z}} = \rho, \quad (1.190)$$

$$\frac{dQ}{d\hat{z}} = -\frac{3}{2} \omega_{\text{K}} w_{r\varphi}, \quad (1.191)$$

$$\frac{1}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \frac{d(aT^4)}{d\hat{z}} = Q, \quad (1.192)$$

$$P(\hat{z} = 0) = \frac{2}{3} \frac{\omega_{\text{K}}^2 z_0}{\kappa_{\text{R}}}, \quad (1.193)$$

$$\hat{\Sigma}(\hat{z} = 0) = 0, \quad (1.194)$$

$$Q(\hat{z} = 0) = \frac{3}{4} \frac{F\omega_{\text{K}}}{r^2}, \quad (1.195)$$

$$Q(\hat{z} = z_0) = 0, \quad (1.196)$$

$$T(\hat{z} = 0) = \left( \frac{Q(\hat{z} = 0)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}, \quad (1.197)$$

где  $\hat{\Sigma}(\hat{z}) = \Sigma_0/2 - \Sigma(\hat{z})$  — отсчитывается от поверхности диска.

Эта система состоит из четырех уравнений, пяти граничных условий и одной неизвестной —  $z_0$ . Необходимо подобрать такое значение  $z_0$ , чтобы при интегрировании системы (1.197) от  $\hat{z} = 0$  к  $\hat{z} = z_0$  было удовлетворено граничное условие  $Q(\hat{z} = z_0) = 0$ . В качестве начального приближения для  $z_0$  можно использовать значения, полученные аналитически (см § 1.5.3), и затем методом последовательных итераций искать  $z_0$ .

### Облучение аккреционного диска жестким излучением

В рентгеновских двойных системах внешние части диска с температурой фотосферы порядка  $10^4\text{К}$  могут облучаться прямыми или рассеянными в короне фотонами от внутренней зоны диска, температура которой порядка  $10^7\text{К}$ . Кроме того, источником рентгеновских фотонов может быть поверхность нейтронной звезды. В протопланетных дисках ультрафиолетовое излучение молодой звезды облучает поверхность диска с температурой порядка  $10^2\text{К}$ .

Рассмотрим случай облучения диска жестким излучением, падающим на поверхность диска под углом  $\arccos \zeta$ . В случае, когда речь идет об облучении диска точечным источником, расположенным в центре диска, а диск можно считать тонким, имеет место соотношение

$$\zeta = \frac{dz_0}{dr} - \frac{z_0}{r}. \quad (1.198)$$

Тогда поток излучения, падающего на поверхность диска на радиусе  $r$ , равен  $\zeta L_x / (4\pi r^2)$ . Если источником жесткого излучения является сам диск, то диаграмма направленности излучения не изотропна, а меняется как косинус угла  $\theta$ , отсчитываемого от вертикальной оси. В предположении, что размер излучающей области много меньше расстояния до нее, поток записывается как  $\zeta L_x / (4\pi r^2) \times 2 \cos \theta$ .

Детальный расчет влияния облучения на вертикальную структуру диска достаточно сложен и проведен, например, в работе [104]. В первом приближении можно ограничиться изменением граничного условия на поток, исходящий с поверхности диска:

$$Q(\hat{z} = 0) = \frac{3}{4} \frac{F \omega_K}{r^2} + \zeta \frac{L_x}{4\pi r^2} 2 \cos \theta.$$

В работе [100] было показано, что для объяснения наблюдаемых оптических кривых блеска рентгеновских Новых в формуле (1.198) требуется использовать эффективную толщину диска по перехвату излучения, в два раза большую, чем  $z_0$ . Предполагается, что нижние слои атмосферы диска, находящиеся над фотосферой, являются непрозрачными для мягкого рентгена, исходящего из центральных частей диска. Кроме того, в статье [105] из моделирования кривой блеска облученной звезды-компаньона было показано, что эффективная толщина диска по перехвату рентгеновского излучения примерно в два раза превосходит  $z_0$ .

### 1.7.3 Пример численного моделирования кривой блеска рентгеновской Новой типа FRED

Рассмотрим численное моделирование рентгеновской новой А 0620–00. Для построения модели использовались следующие параметры: масса центрального объекта (черной дыры) —  $6.6M_{\odot}$ , масса оптического компаньона —  $0.5M_{\odot}$ , орбитальный период — 0.323 дня, наклон орбитальной оси системы к лучу зрения —  $53.5^{\circ}$ , расстояние до системы — 1.1 кпк. Эти параметры были получены в работах из анализа кривой блеска данной системы в спокойном состоянии [106], [107]. На рисунках 1.22 и 1.23 изображены кривые блеска этого источника в мягком рентгеновском диапазоне и в полосе В.

Кривая блеска А 0620–00, вспыхнувшей в 1975 году, — представитель кривых блеска типа FRED<sup>11</sup>, у которых быстрый рост светимости сменяется квазиэкспоненциальным спадом. На рисунках показана только часть кривой блеска после максимума светимости. Интересной особенностью большинства кривых блеска типа FRED является наличие вторичного пика. Природа этого пика на сегодняшний день остается под вопросом.

Для воспроизведения вторичного пика было предположено, что звезда-донор на 43й день после максимума вбрасывает значительное количество вещества в диск. В рамках модели это вещество мгновенно увеличивает поверхностную плотность диска в его внешних областях, что приводит к скачку оптической светимости (Рис. 1.22).

За счет увеличения поверхностной плотности увеличивается момент

---

<sup>11</sup>Fast rise exponential decay (англ.).

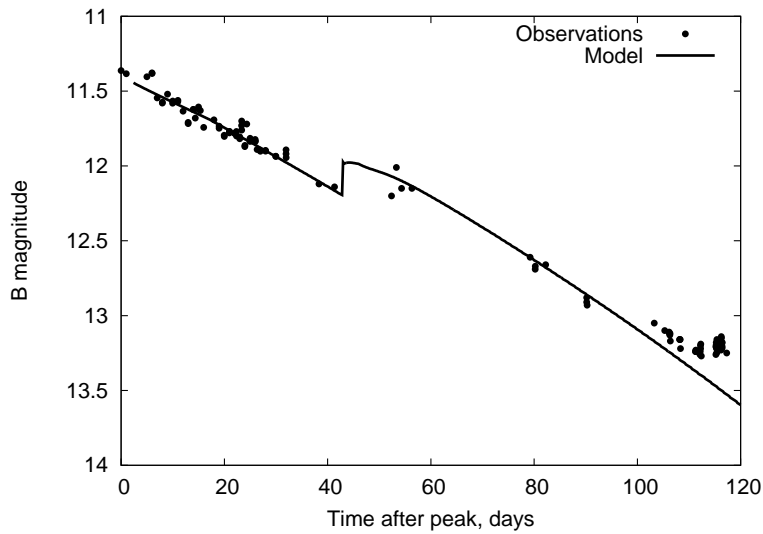


Рис. 1.22: Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в фотометрической полосе В. Кружками отмечены данные наблюдений [108, 109], сплошной линией — модельная кривая блеска.

вязких сил во внешних областях диска, который со временем передается во внутренние области. В центральных областях диска происходит постепенное увеличение момента вязких сил, что приводит к увеличению температуры и, как следствие, рентгеновской светимости диска. Таким образом, появляется локальный максимум на рентгеновской кривой блеска (Рис. 1.23).

По участку рентгеновской кривой блеска до вторичного пика определяется начальный темп аккреции  $\approx 0.2\dot{M}_{\text{Edd}}$  и параметр  $\alpha \approx 0.3$ . По участку оптической кривой блеска до вторичного пика получено отношение эффективной толщины диска по перехвату рентгеновского излучения к  $z_0$ , которое оказывается  $\approx 2$ .

Для объяснения второй части кривой блеска необходимо учитывать следующее. Когда диск остывает до температур, при которых водород рекомбинирует, параметр  $\alpha$  понижается примерно на порядок [111]. В первом приближении можно считать, что аккреция в холодных внешних областях диска останавливается. Внешний радиус области диска, в которой продолжается аккреция, сдвигается к центру вслед за фронтом рекомбинации водорода. В рамках используемой модели фронт рекомбинации водорода находится на радиусе, на котором температура фото-

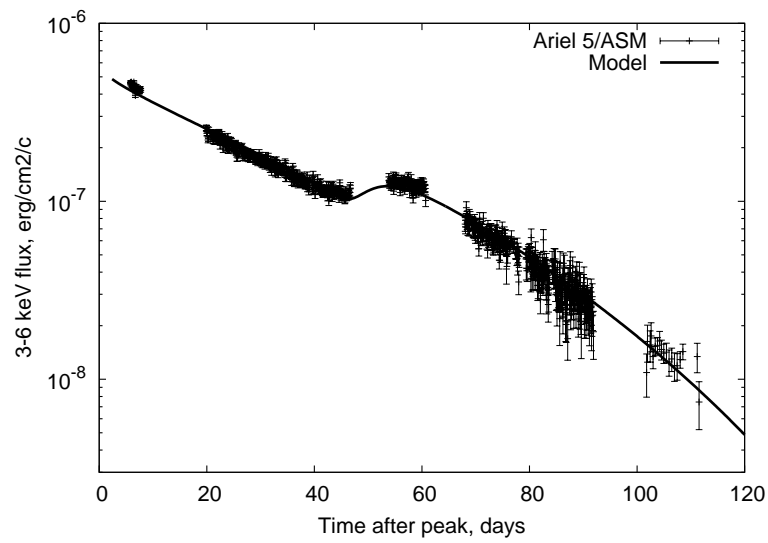


Рис. 1.23: Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в диапазоне 3–6 кэВ. Вертикальными линиями показаны данные спутника Ariel 5 с ошибками [110], сплошной линией — модельная кривая блеска.

сферы диска составляет 6500 К.



# Литература

- [1] Шакура Н. И., *Астрономический Журнал* **49**, 921 (1972).
- [2] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *A&A* **24**, 337 (1973).
- [3] Горбацкий В. Г., *АЖ* **41**, 849 (1964).
- [4] D. Lynden-Bell, *Nature* **223**, 690 (1969).
- [5] J. E. Pringle and M. J. Rees, *A&A* **21**, 1 (1972).
- [6] S. Kato, J. Fukue, and S. Mineshige, *Black-hole accretion disks*, vol. Kyoto University Press (1998).
- [7] J. Frank, A. King, and D. J. Raine, *Accretion Power in Astrophysics* (2002), 3 edn., Cambridge University Press.
- [8] M. A. Abramowicz and P. C. Fragile, *Living Reviews in Relativity* **16**, 1 (2013).
- [9] Морозов А. Г. and Хоперсков А.В., *Физика дисков* (2005), Волгоград, Изд-во Волгоградского университета.
- [10] Бисикало Д. В., Жилкин А. Г., and Боярчук А. А., *Газодинамика тесных двойных систем* (2013), Москва, ФИЗМАТЛИТ.
- [11] J.-P. Lasota, ArXiv e-print 1505.02172 (2015).
- [12] F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister, *A&A* **104**, L10 (1981).
- [13] A. P. Lightman and D. M. Eardley, *ApJ* **187**, L1+ (1974).
- [14] N. Shibazaki and R. Hōshi, *Progress of Theoretical Physics* **54**, 706 (1975).

- [15] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, MNRAS **175**, 613 (1976).
- [16] Ландау Л. Д. and Лившиц Е. М., *Гидродинамика, Курс теоретической физики*, vol. 6 (1959).
- [17] Y. B. Zeldovich, Royal Society of London Proceedings Series A **374**, 299 (1981).
- [18] Фридман А. М., Письма в АЖ **15**, 1122 (1989).
- [19] B. Dubrulle, Icarus **106**, 59 (1993).
- [20] S. A. Balbus and J. F. Hawley, Reviews of Modern Physics **70**, 1 (1998).
- [21] D. Richard and J.-P. Zahn, A&A **347**, 734 (1999).
- [22] G. S. Bisnovatyi-Kogan and R. V. E. Lovelace, New Astronomy Reviews **45**, 663 (2001).
- [23] Колесниченко А. В. and Маров М. Я., *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред* (2009).
- [24] Велихов, Е. П., ЖЭТФ **36**, 1398 (1959).
- [25] S. Chandrasekhar, Proceedings of the National Academy of Science **46**, 253 (1960).
- [26] S. A. Balbus and J. F. Hawley, ApJ **376**, 214 (1991).
- [27] D. M. Eardley and A. P. Lightman, ApJ **200**, 187 (1975).
- [28] A. A. Galeev, R. Rosner, and G. S. Vaiana, ApJ **229**, 318 (1979).
- [29] F. V. Coroniti, ApJ **244**, 587 (1981).
- [30] C. A. Tout and J. E. Pringle, MNRAS **259**, 604 (1992).
- [31] A. Brandenburg, A. Nordlund, R. F. Stein, and U. Torkelsson, ApJ **458**, L45 (1996).
- [32] Википедия, [http://ru.wikipedia.org/wiki/Задачи\\_тысячелетия](http://ru.wikipedia.org/wiki/Задачи_тысячелетия).
- [33] J. W. Deardorff, Journal of Fluid Mechanics **41**, 453 (1970).

- [34] Монин А. С. and Яглом А. М., *Статистическая гидромеханика* (1965).
- [35] A. J. Favre, *Statistical Equations of Turbulent Gases* (1969), 231–267.
- [36] R. Pletcher, J. Tannehill, and D. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Second Edition*, Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences, (Taylor & Francis 1997).
- [37] L. Prandtl, *Z. angew. Math. Mech.* **5** (1925).
- [38] F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister, *A&A* **140**, L35 (1984).
- [39] J. K. Cannizzo, *ApJ* **494**, 366 (1998).
- [40] Сюняев Р.А. and Шакура Н.И., *Письма в АЖ* **3**, 262 (1977).
- [41] I. D. Novikov and K. S. Thorne, in *Black Holes (Les Astres Occlus)* (Edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt) (1973), 343–450.
- [42] Шапиро С. and Тюколски С., *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* (1985), Москва, Изд-во Мир.
- [43] Торн К., Макдональд Д., and Прайс Р., *Черные дыры: мембранный подход* (1988), Москва, Изд-во Мир.
- [44] R. Shafee, R. Narayan, and J. E. McClintock, *ApJ* **676**, 549 (2008).
- [45] V. Paczynsky and P. J. Wiita, *A&A* **88**, 23 (1980).
- [46] Ландау Л. Д. and Лившиц Е. М., *Механика, Курс теоретической физики*, vol. 1 (1965).
- [47] R. J. Tayler, *MNRAS* **191**, 135 (1980).
- [48] Постнов К. А. and Засов А. В., *Курс общей астрофизики* (2005), Москва, физический факультет МГУ.
- [49] J. E. Felten and M. J. Rees, *A&A* **17**, 226 (1972).
- [50] F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister, *A&A* **106**, 34 (1982).

- [51] G. Shaviv and R. Wehrse, *A&A* **159**, L5 (1986).
- [52] Сулейманов В. Ф., *Письма в АЖ* **18**, 255 (1991).
- [53] J. K. Cannizzo, *ApJ* **385**, 94 (1992).
- [54] N. A. Ketsaris and N. I. Shakura, *Astronomical and Astrophysical Transactions* **15**, 193 (1998).
- [55] J.-M. Hameury, K. Menou, G. Dubus, J.-P. Lasota, and J.-M. Hure, *MNRAS* **298**, 1048 (1998).
- [56] G. Dubus, J.-P. Lasota, J.-M. Hameury, and P. Charles, *MNRAS* **303**, 139 (1999).
- [57] Y. Nakao and S. Kato, *PASJ* **47**, 451 (1995).
- [58] Соболев В. В., *Курс теоретической астрофизики* (1985), 3 edn., М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы.
- [59] D. Mihalas and B. W. Mihalas, *Foundations of radiation hydrodynamics* (1984).
- [60] Сулейманов В. Ф., Липунова Г. В., and Шакура Н. И., *Астрономический Журнал* **84**, 612 (2007).
- [61] R. L. Kurucz, *Atlas: A computer program for calculating model stellar atmospheres* (1970), SAO Special Report, Cambridge: Smithsonian Astrophysical Observatory.
- [62] R. Kurucz, *Kurucz CD-ROMs*, Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory (1993).
- [63] C. A. Iglesias and F. J. Rogers, *ApJ* **464**, 943 (1996).
- [64] J. W. Ferguson, D. R. Alexander, F. Allard, T. Barman, J. G. Bodnarik, P. H. Hauschildt, A. Heffner-Wong, and A. Tamanai, *ApJ* **623**, 585 (2005).
- [65] Зельдович Я. Б. and Шакура Н. И., *Астрон. Журнал* **46**, 225 (1969).
- [66] Михалас, Д., *Звездные атмосферы*, (М.: Мир 1982).

- [67] R. Z. Lüst, *Zeitschrift Naturforschung Teil A* **7**, 87 (1952).
- [68] C. F. V. Weizsäcker, *Zeitschrift Naturforschung Teil A* **3**, 524 (1948).
- [69] D. Lynden-Bell and J. E. Pringle, *MNRAS* **168**, 603 (1974).
- [70] J. E. Pringle, *MNRAS* **248**, 754 (1991).
- [71] T. Tanaka, *MNRAS* **410**, 1007 (2011).
- [72] A. R. King and H. Ritter, *MNRAS* **293**, L42 (1998).
- [73] A. A. Zdziarski, R. Kawabata, and S. Mineshige, *MNRAS* **399**, 1633 (2009).
- [74] K. S. Wood, L. Titarchuk, P. S. Ray, M. T. Wolff, M. N. Lovellette, and R. M. Bandyopadhyay, *ApJ* **563**, 246 (2001).
- [75] G. V. Lipunova, *ApJ* **804**, 87 (2015).
- [76] Ватсон Дж. Н., *Теория Бесселевых функций* (1949), 2 edn., Москва, Издательство иностранной литературы.
- [77] Снеддон И., *Преобразования Фурье* (1955), Москва, Изд-во иностранной литературы.
- [78] T. M. MacRobert, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **51**, 116 (1932).
- [79] J. Papaloizou and J. E. Pringle, *MNRAS* **181**, 441 (1977).
- [80] B. Paczynski, *ApJ* **216**, 822 (1977).
- [81] S. Ichikawa and Y. Osaki, *PASJ* **46**, 621 (1994).
- [82] J.-M. Hameury and J.-P. Lasota, *A&A* **443**, 283 (2005).
- [83] W. Chen, C. R. Shrader, and M. Livio, *ApJ* **491**, 312 (1997).
- [84] Баренблатт Г. И., *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (1982), Л.: Гидрометеиздат.
- [85] Баренблатт Г. И., *Автомодельные явления - анализ размерностей и скейлинг*, Физтеховский учебник (2009), Долгопрудный: Издательский Дом Интеллект, 2009.

- [86] Зельдович, Я. Б. and Райзер, Ю. П., *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (1966), Наука, Москва.
- [87] J. E. Pringle, Ph.D. thesis, , Univ. Cambridge, (1974) (1974).
- [88] Любарский Ю. Э. and Шакура Н. И., Письма в АЖ **13**, 917 (1987).
- [89] L. G. Filipov, *Advances in Space Research* **3**, 305 (1984).
- [90] J. K. Cannizzo, H. M. Lee, and J. Goodman, *ApJ* **351**, 38 (1990).
- [91] D. N. C. Lin and J. E. Pringle, *MNRAS* **225**, 607 (1987).
- [92] D. N. C. Lin and P. Bodenheimer, *ApJ* **262**, 768 (1982).
- [93] G. I. Ogilvie, *MNRAS* **306**, L9 (1999).
- [94] P. B. Ivanov, J. C. B. Papaloizou, and A. G. Polnarev, *MNRAS* **307**, 79 (1999).
- [95] R. R. Rafikov, *ApJ* **774**, 144 (2013).
- [96] G. V. Lipunova and N. I. Shakura, *A&A* **356**, 363 (2000).
- [97] Любарский Ю. Э. and Шакура Н. И., Письма в АЖ **13**, 917 (1987).
- [98] Зельдович Я. Б. and Компанеец А. С., *Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе* (1950), АН СССР, Москва.
- [99] Липунова Г. В. and Шакура Н. И., *Астрономический Журнал* **79**, 407 (2002).
- [100] V. F. Suleimanov, G. V. Lipunova, and N. I. Shakura, *A&A* **491**, 267 (2008).
- [101] J.-P. Lasota, *New Astronomy Review* **45**, 449 (2001).
- [102] Зайцев В. Ф. and Полянин А. Д., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (2001), Москва, ФИЗМАТЛИТ.
- [103] Калиткин Н. И., *Численные методы* (1978), Москва, Изд-во Наука.

- [104] Мещеряков А. В., Шакура Н. И., and Сулейманов В. Ф., Письма в Астрономический Журнал **37**, 343 (2011).
- [105] Мещеряков А. В., Ревнивцев М. Г., and Филиппова Е. В. **37**, 892 (2011).
- [106] A. G. Cantrell, C. D. Bailyn, J. A. Orosz, J. E. McClintock, R. A. Remillard, C. S. Froning, J. Neilsen, D. M. Gelino, and L. Gou, ApJ **710**, 1127 (2010).
- [107] L. Gou, J. E. McClintock, J. F. Steiner, R. Narayan, A. G. Cantrell, C. D. Bailyn, and J. A. Orosz, ApJ **718**, L122 (2010).
- [108] H. W. Duerbeck and K. Walter, NASA Special Publication **389**, 343 (1976).
- [109] C. Lloyd, R. Noble, and M. V. Penston, MNRAS **179**, 675 (1977).
- [110] L. J. Kaluzienski, S. S. Holt, E. A. Boldt, and P. J. Serlemitsos, ApJ **212**, 203 (1977).
- [111] J. Smak, Acta Astronomica **34**, 161 (1984).

## 1.8 Еще о выводе уравнений дисковой аккреции

Уравнения аккреционного диска основаны на общеизвестных уравнениях гидродинамики: уравнении неразрывности и уравнении Эйлера. Уравнения Эйлера описывают движение среды в координатах пространства и времени. Динамика вещества описывается набором физических параметров, основные из которых  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность. Они выражаются через функции координат (вектор  $\mathbf{x}$ ) и времени  $t$ . Из уравнений неразрывности и движения выводится уравнение сохранения импульса. Вывод уравнений подробно рассмотрен в книгах [1, 2, 3], также см. работы [4, 5]. Приведем основные уравнения, важные для описания динамики аккреционных дисков.

Уравнение неразрывности в эйлеровых координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.199)$$

Высокоэнергичные процессы, при которых происходит аннигиляция вещества, оставляем за рамками нашего рассмотрения.

Уравнение Эйлера, выражающее собой второй закон Ньютона для непрерывной среды и описывающее динамику идеальной среды, — когда отсутствует трение, — записывается как:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{f} - \nabla P), \quad (1.200)$$

где  $P$  — давление,  $\mathbf{f}$  — внешняя сила, действующая на единичный объем вещества. В случае аккреционных дисков это может быть, например, гравитационная сила, сила давления излучения при больших фотонных потоках. Напомним, что пока мы рассматриваем идеальную жидкость. Здесь  $\nabla$  — оператор набла,  $\nabla$  — градиент.

Уравнения (1.199) и (1.200) могут быть также записаны в тензорных величинах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (1.201)$$

и

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \left( f_i - \frac{\partial(P \delta_{ik})}{\partial x_k} \right), \quad (1.202)$$

где производится суммирование по членам с одинаковыми индексами.



Из (1.201) и (1.202) получается уравнение для потока импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + f_i, \quad (1.203)$$

где введен тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k, \quad (1.204)$$

по смыслу отвечающий за обратимый (механический) перенос импульса.

Величина  $-P \delta_{ik}$  есть тензор напряжений для идеальной жидкости. Для *неидеальной* жидкости, то есть для вязкой среды, полный тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ik} = -P \delta_{ik} + \sigma_{ik}^{\text{vis}}, \quad (1.205)$$

где дополнительно был введен вязкий тензор напряжений  $\sigma_{ik}^{\text{vis}}$ . В результате тензор плотности потока импульса приобретает вид

$$\Pi_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (1.206)$$

Он состоит из двух частей: изменения момента импульса в результате работы сил и переноса момента импульса вместе с веществом за счет общего движения.

Выражение (1.204) записано в самом общем виде, так как в нем не сделано никаких дальнейших предположений о свойствах вязкого тензора напряжений. На практике делается ряд упрощающих предположений, которые позволяют переписать это уравнение в более явном виде, при этом вводятся так называемые коэффициенты вязкости. Свойства тензора напряжений  $\sigma_{ik}^{\text{vis}}$  подробно рассмотрены в [2, глава 2]. Основными его характеристиками являются симметричность и пропорциональность изменениям скоростей внутри среды. Для аккреционного диска вместо него обычно используют тензор турбулентной вязкости, который в простом и основном случае имеет ту же функциональную зависимость от скоростей что и  $\sigma_{ik}^{\text{vis}}$  (см. § 1.3).

Для изотропных коэффициентов вязкости и при условии, что они постоянны в среде, работает известное уравнение Навье-Стокса (уравнение Эйлера для вязкой среды), которое в операторном виде записывается так:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{f} - \nabla P) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{\zeta + \eta/3}{\rho} \nabla \nabla \mathbf{v}. \quad (1.207)$$

Здесь  $\Delta$  — векторный оператор Лапласа. Сила  $\mathbf{f}$  может быть записана как градиент некоторого потенциала  $\Phi$ . Коэффициент  $\eta$  — динамический коэффициент сдвиговой вязкости, обусловленной относительным движением слоев в веществе,  $\zeta$  — коэффициент объемной вязкости<sup>12</sup>. Объемная вязкость описывает необратимые процессы в газе при симметричных изменениях объема (в таких процессах сдвиговая вязкость не работает). Другими словами,  $\zeta$  характеризует изменение давления от темпа изменения плотности. Для одноатомного идеального газа в состоянии локального термодинамического равновесия (ЛТР) коэффициент объемной вязкости равен нулю, так как у такого газа отсутствуют внутренние степени свободы. Если же в веществе проходят микроатомные процессы (колебания молекул, вращение, ионизация) с характерным временем, сравнимым или больше, чем характерное время гидродинамического потока, то объемная вязкость может быть сравнима по величине со сдвиговой вязкостью.

Когда равновесие в газе в результате внутренних релаксационных процессов устанавливается намного быстрее, чем характерные скорости потока, то объемной вязкостью можно пренебречь (условие  $\zeta = 0$  называется “гипотезой Стокса”). В случае несжимаемой жидкости последний член в уравнении Навье-Стокса вообще обращается в ноль. Учет объемной вязкости важен при рассмотрении ударных волн, распространении звука, спиральных волн плотностей в аккреционных дисках.

Выпишем уравнение неразрывности, три компоненты уравнения Навье-Стокса, а также уравнение теплового баланса в цилиндрических координатах. Предполагаем, что в аккреционных дисках сохраняется аксиальная симметрия. Если рассматривать геометрически тонкие диски, удобно работать в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ . Указанные предположения приводят к обнулению производных по  $\varphi$ .  $\sigma_{r\varphi}^{\text{vis}}$  Для толстых дисков или для одновременного исследования структуры вещества, истекающего с поверхности диска, используют сферическую систему координат. В данной главе мы ограничимся классической моделью аккреционного диска и поэтому работать будем в цилиндрической системе координат. Заметим, что второй член слева (1.207) — это вектор, являющийся ковариантной производной поля скоростей  $\mathbf{v}$  по отношению к тому

<sup>12</sup>В книге Ландау и Лившица [2]  $\zeta$  названа “второй вязкостью”. В англоязычной литературе второй вязкостью преимущественно называется величина  $\lambda$ , которая связана с объемной вязкостью по формуле  $\zeta = \lambda + 2\eta/3$ . Сама объемная вязкость — bulk viscosity или volume viscosity. Сдвиговая вязкость — shear viscosity.

же полю  $\mathbf{v}$ . Оператор адвекции  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  в декартовых координатах имеет вид  $v_x \partial / \partial x + v_y \partial / \partial y + v_z \partial / \partial z$ , а в криволинейных координатах имеет более сложный вид. В правой части уравнения в третьем члене присутствует векторный лапласиан, а в четвертом члене — вектор  $\text{grad div } \mathbf{v}$ .

### Уравнение неразрывности

Запишем уравнение неразрывности (1.199) в цилиндрических координатах при аксиальной симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (1.208)$$

**$r$ -компонента уравнения Навье-Стокса** Второй член слева в (1.207) в цилиндрических координатах имеет вид:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}.$$

Таким образом,  $r$ -компонента уравнения Навье-Стокса при аксиальной симметрии, в цилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \frac{\zeta + \eta/3}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right). \end{aligned}$$

Для тонкого диска скорости не зависят от  $z$  и, следовательно,

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\eta + \zeta + \eta/3}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right). \quad (1.209)$$

В тонком диске основными по величине членами этого уравнения являются  $v_\varphi^2/r$  и градиент потенциала. Для Ньютоновского гравитационного потенциала, таким образом, мы получаем закон Кеплера для кругового движения свободных частиц вокруг центрального тела. При этом силы давления и трения в диске являются малыми следующего порядка. В Кеплеровском диске угловая скорость  $\omega = v_\varphi/r$  зависит только от массы центрального тела. Если масса центрального тела много больше массы диска (диск не самогравитирующий), то  $\omega$  не меняется во времени.

**$\varphi$ -компонента уравнения Навье-Стокса**

Далее рассмотрим тангенциальную компоненту уравнения Навье-Стокса. Второй член в левой части (1.207) в цилиндрических координатах имеет вид:

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}.$$

Третий член справа — векторный лапласиан, — в цилиндрических координатах равен

$$\frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right).$$

Четвертый член справа,  $\varphi$ -компонента вектора  $\text{grad div } \mathbf{v}$ , — равен нулю вследствие аксиальной симметрии. Также равен нулю градиент давления  $P$  по  $\varphi$  и  $f_\varphi = 0$ . Получаем:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right)$$

Для тонкого аккреционного диска, избавляясь от производных во вертикальной координате, получаем:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right).$$

Третий член слева по смыслу является силой Кориолиса. Домножим обе части на  $\rho$ , и угловую компоненту скорости заменим на  $\omega r$ . Постоянный коэффициент  $\eta$  внесем под знак производной. Преобразуя выражение в скобках в правой части последней формулы, равное  $3\partial\omega/\partial r + r\partial^2\omega/\partial r^2$ , получаем:

$$\rho r \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho v_r \left( \frac{\partial(\omega r)}{\partial r} + \omega \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

Окончательно получаем, умножив обе стороны на  $r^2$ :

$$\rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho v_r r \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} = - \frac{\partial(r^2 w_{r\varphi})}{\partial r}. \quad (1.210)$$

При этом нами была произведена замена с использованием новой величины:

$$w_{r\varphi} = -\eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}. \quad (1.211)$$

Компонента аксиально-симметричного тензора вязких напряжений в аккреционном диске  $w_{r\varphi}$  выписана через компоненты скорости в [2] (глава 2)<sup>13</sup>. Коэффициент динамической вязкости  $\eta$  в аккреционном диске определяет величину тензора вязких напряжений, обусловленного турбулентными течениями. Подробнее о модели вязкости в аккреционных дисках будет говориться в § 1.3.

### **$z$ -компонента уравнения Навье-Стокса**

Выпишем  $z$ -компоненту уравнения Навье-Стокса. В адвективном члене слева (1.207) остается только два члена. В правой части уравнения для описания внешней силы вводим потенциал  $\Phi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) &+ \frac{\zeta + \eta/3}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Для гравитации в плоской метрике  $\Phi_N(r, z) = -GM/\sqrt{r^2 + z^2}$ , где  $M$  — масса центрального объекта, на который аккрецируется вещество. Теперь предполагаем, что по высоте диск находится в *гидростатическом равновесии*, то есть  $v_z = 0$ . В тонком диске считаем незначительными изменения скоростей по  $z$ . Тогда получаем для  $z \ll r$ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{GM}{r^3} z. \quad (1.212)$$

## **1.9 Неконсервативный диск**

Рассмотрим диск, с поверхностей которого происходит истечение вещества в результате некоторых физических процессов, природу которых не будем детально рассматривать. Будем называть такие диски неконсервативными. Наоборот, диски, которые рассматривались выше, являются консервативными.

Пусть имеется геометрическое кольцо в диске с радиусом  $r$  и шириной  $\Delta r$ . Выпишем для него уравнения сохранения массы и момента

<sup>13</sup>это величина  $\sigma_{r\varphi}^{\text{vis}}$  с противоположным знаком

импульса. Масса, содержащаяся в этом кольце в некоторый момент времени, равна  $2\pi r \Delta r \Sigma_0$ . Поскольку имеется поток вещества, в общем случае масса, заключенная внутри кольца, может меняться за малое время  $\Delta t \rightarrow 0$  согласно (см. [5]):

$$\frac{\Delta(2\pi r \Delta r \Sigma_0)}{\Delta t} = v_r(r, t) 2\pi r \Sigma_0(r, t) - v_r(r + \Delta r, t) 2\pi (r + \Delta r) \Sigma_0(r + \Delta r, t),$$

если нет потока массы через нижнюю и верхнюю поверхности кольца. В первом приближении, при  $\Delta r \rightarrow 0$ , правая часть

$$\approx -2\pi \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r)}{\partial r} \Delta r,$$

где  $v_r(r)$  — радиальная корость потока вещества в диске на данном радиусе. Разделив на  $2\pi \Delta r$ , получаем для консервативного диска

$$r \frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r)}{\partial r} = 0. \quad (1.213)$$

Если диск неконсервативный, мы должны приравнять левую часть (1.213) количеству вещества, покидающего диск в единицу времени в расчете на  $2\pi \Delta r$ .

$$r \frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r)}{\partial r} = \dot{S}_M \quad (1.214)$$

Можно записать  $\dot{S}_M = -\Sigma_0 v_w$ , где  $v_w$  — эффективный темп ветра [см/с]. По смыслу величина  $\dot{S}_M$  совпадает с изменением темпа аккреции внутри диска в данном кольце с обратным знаком, но только в стационарном случае:

$$\dot{S}_M = -\frac{\partial \dot{M}}{2\pi \partial r}. \quad (1.215)$$

Теперь рассмотрим полный момент импульса, заключенный внутри этого же кольца. В какой-то момент времени он равен  $2\pi r \Delta r \Sigma_0 v_\varphi r$ . Момент импульса может меняться, так как вещество протекает через границы рассматриваемого геометрического элемента и на массу, заключенную внутри, действуют силы. Силу трения можно рассматривать как приложенную к поверхности кольца.

Аналогично можем записать при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta(2\pi r \Delta r \Sigma_0 h)}{\Delta t} = v_r(r, t) 2\pi r \Sigma_0(r, t) h(r, t) -$$

$$-v_r(r + \Delta r, t) 2\pi (r + \Delta r) \Sigma_0(r + \Delta r, t) h(r + \Delta r, t),$$

где  $h(r, t)$  — удельный момент импульса. Устремляя  $\Delta r \rightarrow 0$  и разделив на  $2\pi \Delta r$ , получаем

$$r \frac{\partial(\Sigma_0 h)}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r h)}{\partial r} = 0,$$

если нет момента сил и иного источника/стока момента импульса в кольце, кроме переноса с веществом через боковые поверхности кольца, перпендикулярные радиусу.

Допустим, что есть потеря момента импульса из кольца, связанная с уходом вещества через горизонтальные поверхности кольца (например, под действием вертикальных сил, у которых нет аксиальной составляющей: фотоиспарение протопланетных дисков [напр., 6, 7], ветер из-за давления излучения в сверхкритическом режиме [напр., 8]):

$$r \frac{\partial(\Sigma_0 h)}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r h)}{\partial r} = \dot{S}_J < 0,$$

где  $\dot{S}_J$  — уменьшение момента импульса вещества, заключенного в кольце, за единицу времени в расчете на  $2\pi \Delta r$ . Параметризуем истекающий момент импульса, используя безразмерный фактор  $k_w$ :

$$\dot{S}_J = k_w \dot{S}_M h.$$

в стационарном случае:

$$\dot{S}_J = -k_w \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} h.$$

Далее, при наличии вязкости в аккреционном диске, на кольцо действует тангенциальная сила, момент которой равен  $F$ :

$$r \frac{\partial(\Sigma_0 h)}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r h)}{\partial r} = \dot{S}_J - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (1.216)$$

Раскроем второй член слева в (1.216) и используем для замены (1.214). Если  $h \neq f(t)$  (диск не самогравитирующий и радиальный градиент давления не меняется), получим:

$$\Sigma_0 v_r r \frac{\partial h}{\partial r} = \dot{S}_M (k_w - 1) h - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (1.217)$$

Положим в последнем уравнении  $F = 0$ : нет внутренних механизмов вязкости. Если локально на каждом радиусе происходит потеря вещества диском, торможение оставшегося в диске вещества возможно только лишь в случае, если эффективно  $k_w > 1$  (напомним, что  $\dot{S}_M < 0$ ). Таким образом, торможение чисто гидродинамическим ветром устроить вряд ли можно. Магнитогидродинамический ветер от диска, с другой стороны, может быть устроен так, что происходит торможение вещества за счет “зацепления” открытых силовых линий магнитного поля (“магнитный ветер”, см., например, [9]).

Итак, гидродинамическое истечение вещества не приводит к перераспределению момента импульса в диске. Влияние на характер вязкой эволюции диска “локальный” ветер может иметь опосредованно: при уменьшении плотности в диске меняются физические условия, что может приводить к изменению величины вязкости. В частности, протопланетный диск может полностью истощиться под воздействием внешнего рентгеновского излучения [7].

Подставим комбинацию  $\Sigma_0 v_r r$  из (1.217) в (1.214) и получим уравнение вязкой эволюции для диска с локальным истечением:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial h} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{S}_M h (k_w - 1)}{\partial h / \partial r} \right) + \frac{\dot{S}_M}{r}.$$

Далее предполагаем везде, что  $k_w = 1$ .

Для нестационарного неконсервативного диска с  $k_w = 1$  получаем уравнение

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{(GM)^2}{4\pi h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} + \frac{\dot{S}_M}{r}.$$

(сравните с уравнением для консервативного диска (1.101)). В стационарном случае оно элементарно интегрируется с учетом (1.215):

$$\frac{\dot{S}_M}{r} = -\frac{(GM)^2}{4\pi h^3} \frac{\partial \dot{M}}{\partial h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \dot{M}(r) + const.$$

## 1.10 Уточненная связь между $\nu_t$ и $\alpha$

Рассмотрим третье уравнение из системы (1.75), описывающей вертикальную структуру диска. Решение дает значение параметров  $\Pi_{1..4}$ , и



мы можем записать

$$\Pi_3 W_{r\varphi} = \frac{\alpha \Re T_c \Sigma_0}{\mu}.$$

Подставляем связь (1.97) между тензором напряжений и кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости и получим:

$$\nu_t = \frac{2}{3} \alpha \omega_K r^2 \left( \frac{z_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1 \Pi_3}.$$

Эта формула аккуратнее учитывает особенности распределения физических параметров по вертикали в диске, чем (1.123).

# Литература

- [1] Зельдович, Я. Б. and Райзер, Ю. П., *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (1966), Наука, Москва.
- [2] Ландау Л. Д. and Лившиц Е. М., *Гидродинамика, Курс теоретической физики*, vol. 6 (1959).
- [3] D. Mihalas and B. W. Mihalas, *Foundations of radiation hydrodynamics* (1984).
- [4] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *A&A* **24**, 337 (1973).
- [5] J. E. Pringle, *ARA&A* **19**, 137 (1981).
- [6] R. D. Alexander, C. J. Clarke, and J. E. Pringle, *MNRAS* **369**, 229 (2006).
- [7] P. J. Armitage, *ARA&A* **49**, 195 (2011).
- [8] G. V. Lipunova, *Astronomy Letters* **25**, 508 (1999).
- [9] R. D. Blandford and D. G. Payne, *MNRAS* **199**, 883 (1982).